ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 22 **Februar 1942** **Heft 1**

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Kondensationserscheinungen in Überschalldüsen.

Von *Kl. Oswatitsch* in Göttingen.

(Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Bei Lavaldüsen, welche von Wasserdampf oder feuchter Luft durchströmt werden, zeigen sich Kondensationserscheinungen erst bei sehr starken Übersättigungen. Bei den in Betracht kommenden Kondensationsgeschwindigkeiten erweisen sich die möglichen Kondensationskernzahlen als viel zu gering, um merkliche Nebelbildung zu verursachen. Bei starken Übersättigungen tritt ein Zusammenbrechen der Kondensation ein, wie es schon von anderen Übersättigungsversuchen her bekannt ist. Die theoretischen Resultate decken sich vollkommen zufriedenstellend mit Druckverteilungsmessungen in Überschalldüsen, welche für Wasserdampf von anderen Autoren und für feuchte Luft vom Verfasser selbst durchgeführt wurden.

I. Einleitung.

Wenn man feuchte Luft oder Wasserdampf durch eine Lavaldüse strömen läßt, so zeigt sich erst etwas stromabwärts vom engsten Düsenquerschnitt Nebelbildung, obwohl die Sättigungsgrenze im allgemeinen bereits vor dem engsten Düsenquerschnitt erreicht wird. Bei feuchter Luft wird die Nebelbildung dabei vielfach erst bei besonders geeigneten Beleuchtungsverhältnissen sichtbar. Man beobachtet aber bei großen mit feuchter Luft betriebenen Düsen verhältnismäßig leicht die sogenannten *X*-Stöße, deren Zusammenhang mit der Kondensation zuerst von Wieselsberger entdeckt wurde. Man spricht daher auch vielfach von Kondensationsstößen. Sie treten am Ort des Kondensationsbeginnes in der Düse auf.

Es ist der Zweck der vorliegenden Arbeit, die Frage nach dem Grund dieser Kondensationsverzögerung sowie die Frage nach dem Ablauf der schließlich eintretenden Kondensation zu beantworten. Zu diesem Zweck wurden Druck- und Dichtemessungen in einer von feuchter Luft durchströmten Lavaldüse gemacht, über die hier unter anderem berichtet werden soll. Für das Verhalten von Wasserdampf in Überschalldüsen werden Druckmessungen von Yellott [1][1]) und von Binnie und Woods [2] herangezogen. Die Beobachtungen von Nebelbildung in Düsen werden hier nicht weiter berücksichtigt. In den Zusammenhang von Sichtbarkeit und Wassergehalt eines Nebels spielen zu viele Parameter herein, als daß es möglich wäre, auf Grund von Nebelbeobachtungen verläßliche Schlüsse ziehen zu können. Der Hauptteil der Arbeit ist der theoretischen Behandlung des Problems gewidmet.

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Schrifttum-Verzeichnis am Schluß der Arbeit.

Historisch ist zu bemerken, daß als Erster R. v. Helmholtz, der Sohn des berühmten Naturforschers, auf die Unterkühlung von Wasserdampf, der durch eine Mündung in die Luft austritt, hingewiesen hat. Bei Lokomotiven läßt sich sehr leicht beobachten, daß der austretende Wasserdampf unmittelbar hinter der Mündung vollkommen klar bleibt. Die Kondensation so eines Wasserdampfstrahles steht aber mit der Kondensation von Wasserdampf in einer Lavaldüse in keinem Zusammenhang. Das einzig Gemeinschaftliche an beiden Erscheinungen ist lediglich der Umstand, daß es sich stets um unterkühlten Wasserdampf handelt. Genaue Beobachtungen eines Freistrahles zeigen nämlich, daß die Kondensation in der turbulenten Vermischungszone auftritt, während die Kondensationserscheinungen in Lavaldüsen mit Turbulenz gar nichts zu tun haben. Eingehend hat sich Stodola [3] mit der Frage nach der Nebelbildung in strömendem Wasserdampf befaßt. Die ersten Beobachtungen über Kondensationserscheinungen in mit feuchter Luft durchströmten Lavaldüsen wurden im hiesigen Institut im Zusammenhang mit Schlierenbeobachtungen gemacht. Zur Veröffentlichung dieser Beobachtungen kam es aber nicht. In den letzten Jahren erschien außer den beiden früher zitierten Arbeiten [1] und [2] noch eine Arbeit von Yellott und Holland [4] über Kondensationserscheinungen in von Wasserdampf durchströmten Überschalldüsen.

II. Besprechung experimenteller Arbeiten.

Sowohl Yellot als auch Binnie und Woods benützen Lavaldüsen von rechteckigem Querschnitt. Die Düsen sind symmetrisch und werden von zwei profilierten Metallwänden und zwei Glaswänden begrenzt, welche es gestatten, die Nebelbildung zu beobachten. In der Düsenachse befindet sich ein Röhrchen mit einer Anbohrung zur Messung des statischen Druckes.

Yellott (Bild 2 zeigt Versuch 1 und 3) mißt bei einer ungefähr gleichbleibenden „Kesseltemperatur" von 421° abs. bei drei verschiedenen Drucken von 2040, 1525 und 1410 mm Hg. Seine Düse weist ein ganz beträchtliches Druckgefälle auf, welches zweifellos die Meßgenauigkeit herabsetzt, aber den Vorteil hat, daß Ablösungserscheinungen im wesentlichen verhindert worden sein dürften. Bei diesen Experimenten tritt der Kondensationsbeginn durch eine charakteristische plötzliche Verflachung der Druckkurven in Erscheinung.

Binnie und Woods (Bild 3 zeigt Versuch 93) messen bei nahezu gleichbleibendem Kesseldruck von 1080 mm Hg. Die Kesseltemperatur schwankt zwischen 435,8° abs. und 386,7° abs. Dem Druckgefälle ist im Überschallgebiet ein stehender Wellenzug überlagert, welcher mit den Kondensationserscheinungen in keinem Zusammenhang steht. Die Verfasser führen diese Erscheinung auf den scharfkantigen Düseneinlauf zurück. Bei diesen Versuchen äußert sich der Kondensationsbeginn in einem manchmal recht beträchtlichen Druckanstieg. Es ist daher fraglich, ob dieser Druckanstieg lediglich einem Kondensationseffekt oder auch einer noch hinzukommenden Ablösung der Grenzschicht zuzuschreiben ist. Das große Versuchsmaterial macht diese Versuche besonders wertvoll.

Ich selbst habe Luft in bekannter Weise durch eine Düse in einen Vakuumkessel abgesaugt. Die Düse hatte ebenfalls rechteckigen Querschnitt und stellte im wesentlichen die Hälfte einer symmetrischen Düse dar. Die Anordnung war so, daß in einem rechteckigen Kanal aus Metall ein verschiebbares Profil eingebaut war (Bild 1). Am Ort des Profils waren die seitlichen Metallwände durch Glaswände ersetzt. In der dem Profil gegenüberliegenden Wand war eine Anbohrung zur Messung des statischen Druckes. Durch Verschieben des Profils war es möglich, den Druckverlauf längs der ganzen Düse zu verfolgen. Die jeweilige Stellung des Profils ließ sich mit Hilfe eines Nonius auf 0,1 mm genau ablesen. Außer dem stationären Druck wurde auch die Dichte gemessen. Über die dabei angewandte Methode wird an anderer Stelle berichtet.

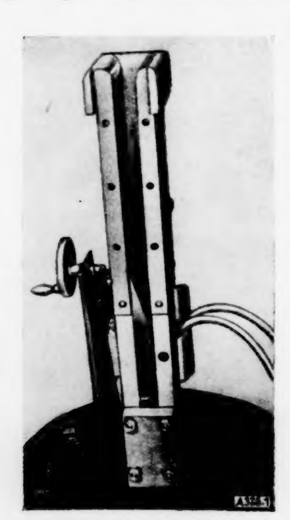


Bild 1. Einblick in die Düse mit verschiebbarem Profil. Eine Seitenwand ist entfernt.

Um den Einfluß der Feuchtigkeit auf die Strömung vom Einfluß der Reibungsschicht, welcher sich vorläufig noch nicht theoretisch erfassen läßt, trennen zu können, wurden zunächst Messungen mit trockener Luft vorgenommen. Dies wurde so gemacht, daß an die Düse ein weites Rohr angeschlossen wurde, welches mit einem Gasometer in Verbindung stand. Preßluftflaschen, welche mit trockener Luft von 150 bis 200 at Druck gefüllt waren, wurden nun in das Verbindungsrohr abgeblasen und diese Luft wurde durch die Düse in den Kessel abgesaugt. Das Gasometer diente hierbei nur zum Druckausgleich und nicht zum Aufbewahren von trockener Luft, da es sich zeigte, daß es für den letzteren Zweck nicht geeignet war. Der Feuchtigkeitsgehalt der

Luft wurde mit einem Aßmannschen Aspirations-Psychrometer sowohl bei den Messungen mit trockener Luft wie auch bei den Messungen mit feuchter Luft kontrolliert. Die Messungen mit feuchter Luft wurden bei folgenden „Kesseltemperaturen" ϑ_0 und relativen Feuchtigkeiten φ_0 durchgeführt:

Versuch	ϑ_0	φ_0
1	15,0	0,90
2	14,0	0,75
3	19,7	0,40.

Da sich die Versuche vor allem durch die relative Feuchtigkeit der Luft unterschieden, wollen wir sie nach diesen Werten benennen. Beim Versuch $\varphi_0 = 0{,}40$ wurde einfach Laboratoriumsluft abgesaugt. Die höheren Feuchtigkeitsgehalte wurden dadurch hergestellt, daß vor der Düse ein Gerüst aufgestellt wurde, welches so mit Tüchern behängt war, daß die Luft durch die Tücher hindurch abgesaugt wurde. Durch verschiedenes Befeuchten der Tücher wurden die relativen Feuchtigkeiten von 0,75 und 0,90 erreicht. Diese Werte stellen einen Mittelwert, der während des Durchmessens der Düse abgelesenen Feuchtigkeiten dar. Die Feuchtigkeitsschwankungen betrugen wenige Prozent. Gewisse Abweichungen der Meßwerte an Stellen, wo bereits Kondensation stattfindet, können daher außer in der Meßungenauigkeit auch im gewissen Grad in der Änderung der Versuchsbedingungen ihren Grund haben. Der Kondensationsbeginn ist bei meinen Versuchen ebenfalls durch eine plötzliche Verflachung des Druckgefälles auf einer kurzen Wegstrecke charakterisiert, welches hier nun auch von einer Verflachung des Dichtegefälles begleitet ist (Bild 4).

III. Theoretische Behandlung.

1. Grundgleichungen. Wir rechnen im folgenden mit einer Düse, welche von feuchter Luft, in der sich Wasser- oder Eistropfen befinden, durchströmt wird. Es bezieht sich der Index 1 stets auf den Anteil trockener Luft, der Index 2 auf den Wasserdampfanteil und der Index 3 auf den Wasser- oder Eisgehalt der Luft. Größen ohne Index beziehen sich auf das Gemisch von Wasserdampf und trockener Luft, also auf die feuchte Luft. Wir erhalten dann die Lösung für Strömungen von Wasserdampf und Wasser allein dadurch, daß wir die Durchflußmenge G_1 des Anteiles trockener Luft gleich Null setzen. In diesem Falle sind die Größen ohne Index einfach gleich den Größen mit dem Index 2.

Um das Problem nicht allzu stark zu komplizieren, wollen wir folgende vereinfachende Annahmen machen. Wir begnügen uns mit einer Stromfadentheorie für stationäre Strömung. Im allgemeinen verwenden wir dabei das vereinfachte Bild, daß wir uns die gesamte Wassermenge, welche sich an irgendeiner Stelle befindet, in einen oder mehrere Stromfäden vom Gesamtquerschnitt f_3 konzentriert denken. Der Querschnitt des Gasstromfadens sei f. Lediglich bei Betrachtungen über die Kräfte, welche Gas und Wasser aufeinander ausüben, und über die Kondensationsgeschwindigkeit stellen wir uns das Wasser (oder das Eis) als aus zahlreichen Tropfen bestehenden Nebel vor.

Wir müssen annehmen, daß Translationsgeschwindigkeit w und Temperatur T vom Wasserdampf und trockener Luft gleich sind. Es ist dann auch die Dichte des Gasgemenges gleich der Summe der Dichten der Einzelteile und der Druck des Gasgemenges gleich der Summe der Partialdrucke. Wir können also schreiben

$$w = w_1 = w_2; \quad T = T_1 = T_2; \quad \varrho = \varrho_1 + \varrho_2; \quad p = p_1 + p_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Da ferner feuchte Luft, Wasserdampf und trockene Luft durch denselben Querschnitt hindurchgehen, ist

$$f_1 = f_2 = f.$$

Bezeichnen wir mit v das spezifische Volumen und mit G die Durchflußmenge, so erhalten wir wegen $G = f \cdot \varrho \cdot w$ die beiden Gleichungen

$$G = G_1 + G_2 \quad \text{und} \quad G \cdot v = G_1 \cdot v_1 = G_2 \cdot v_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Bezeichnen wir die Summe der Durchflußmengen von Wasserdampf und Wasser mit $G_{23} = G_2 + G_3$, dann ist die gesamte Durchflußmenge $G_1 + G_{23}$. Durch diese wollen wir die einzelnen G dimensionslos machen und erhalten so die Durchflußmengenverhältnisse

$$g_i = \frac{G_i}{G_1 + G_{23}} \quad i = 1, 2, 3 \cdot \quad g = \frac{G}{G_1 + G_{23}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a).$$

Anstatt der Gl. (2) können wir dann schreiben

$$g = g_1 + g_2 \quad \text{und} \quad \frac{g_1}{g} = \frac{\varrho_1}{\varrho}; \qquad \frac{g_2}{g} = \frac{\varrho_2}{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a).$$

Die Kontinuitätsbedingungen für unser Problem haben nun folgende Gestalt. Erstens muß die durch irgendeinen Düsenquerschnitt $F=f+f_3$ hindurchgehende Menge trockener Luft konstant und gegeben sein, zweitens muß die Summe der Durchflußmengen von Wasserdampf und Wasser an irgendeinem Düsenquerschnitt konstant und gegeben sein.

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= f\cdot\varrho_1\cdot w \\ G_{23} &= f\cdot\varrho_2\cdot w + f_3\cdot\varrho_3\cdot w_3 \end{aligned}\right\} \qquad (3).$$

Gegeben muß ferner auch die Düsenform sein. Wählen wir die x-Richtung als Strömungsrichtung, so ist also $F=f+f_3$ als Funktion von x bekannt. Der oberen Gleichung liegt ferner die Voraussetzung zugrunde, daß alle Wasserteilchen eine einheitliche lediglich vom Ort abhängige Geschwindigkeit w_3 haben. Diese Annahme ist schon deshalb nötig, da sich die Tropfengrößen und Tropfenzahlen sonst allein durch Zusammenfließen von Tropfen ändern würden.

Wir werden sehen, daß es nicht möglich sein wird, anzunehmen, daß die durch einen Querschnitt hindurchfließende Tropfenzahl konstant ist. Nennen wir die auf die Volumeinheit Gas-Wassergemisch kommende Tropfenzahl n und die sich in der Volumeinheit des Gases und in der Zeiteinheit bildende Tropfenanzahl J — diese Größe wollen wir auch Keimbildungshäufigkeit nennen —, so ist die durch einen Düsenquerschnitt F hindurchgehende Tropfenzahl gleich $n\cdot w_3\cdot F$. Die im Volumen $f\cdot \mathrm{d}x$ in der Zeiteinheit sich bildende Tropfenzahl muß gleich sein der Vermehrung des durch den Düsenquerschnitt F hindurchgehenden Tropfenflusses, also:

$$J\cdot f\cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}(n\cdot w_3\cdot F) = w_3\cdot F\cdot \mathrm{d}n + n\cdot \mathrm{d}(w_3\cdot F)$$

oder auch

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = \frac{J}{w_3}\cdot\frac{f}{F} - \frac{n}{w_3\cdot F}\cdot\frac{\mathrm{d}(w_3\cdot F)}{\mathrm{d}x} \qquad (3a).$$

Diese Gleichung läßt sich gut übersehen. Zwei Umstände führen zu einer Änderung der Tropfenzahl in der Volumeinheit auf der Wegeinheit. Erstens der Umstand, daß sich neue Tropfen bilden und zweitens der Umstand, daß sich das Durchflußvolumen des Tropfen enthaltenden Gases ändert.

An einer Stelle, an welcher wir gleiche Tropfenradien ξ für alle Tropfen voraussetzen können, läßt sich die Durchflußmenge des Wassers auch in folgender Form schreiben:

$$G_3 = f_3\cdot w_3\cdot\varrho_3 = F\cdot w_3\cdot n\cdot\frac{4\pi}{3}\varrho_3\,\xi^3 \qquad (3b).$$

Wir wenden uns nun den Bewegungsgleichungen zu. Wir haben eine für die feuchte Luft und eine zweite für das Wasser abzuleiten. Auf die feuchte Luft wirken außer den Druckkräften die Widerstandskräfte der Tropfen. Bezeichnen wir also den Widerstand eines Tropfens mit W, so erhalten wir die Gleichung

$$f\cdot\varrho\cdot \mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\,w = -f\cdot \mathrm{d}p - F\cdot \mathrm{d}x\cdot n\cdot W.$$

Die Beschleunigung der Luftmasse $f\cdot\varrho\cdot \mathrm{d}x$ wird bewirkt durch die Abnahme der Druckkräfte $-f\,\mathrm{d}p$, vermindert um den Widerstand der dieser Luftmasse zukommenden $F\cdot \mathrm{d}x\cdot n$ Tropfen.

Die Beschleunigung der Wassermasse wird durch drei Ursachen bewirkt: 1. wirkt auf das Wasser ein Druckgefälle, 2. übt die Luft auf die Tropfen eine Kraft aus und 3. kondensiert Wasserdampf, welcher eine größere Geschwindigkeit haben kann als das Wasser, und überträgt dabei Bewegungsgröße auf dieses. Die durch die dritte Ursache bewirkte Beschleunigung ist gleich der Änderung der Bewegungsgröße in der Zeiteinheit, d. i. die Änderung der Wassermenge in der Zeiteinheit mal der Geschwindigkeitsabnahme:

$$f_3\,\varrho_3\,\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}w_3}{\mathrm{d}x}\,w_3 = -f_3\,\mathrm{d}p + F\,\mathrm{d}x\,n\,W + (w-w_3)\,\mathrm{d}G_3\,.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhalten wir leicht

$$\left.\begin{aligned} w\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \frac{n}{\varrho}\frac{F}{f}W \\ G_3\,w_3\frac{\mathrm{d}w_3}{\mathrm{d}x} &= -G_3\frac{1}{\varrho_3}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{w_3}{w}G\frac{n}{\varrho}\frac{F}{f}W + w_3(w-w_3)\frac{\mathrm{d}G_3}{\mathrm{d}x} \end{aligned}\right\} \qquad (4).$$

Prinzipiell wäre zu bemerken, daß diese beiden Gleichungen unter der Voraussetzung $\frac{\mathrm{d}G_3}{\mathrm{d}x}>0$ abgeleitet wurden und exakt auch nur für $\frac{\mathrm{d}G_3}{\mathrm{d}x}\geq 0$ Gültigkeit haben. Das Glied ist aber im allgemeinen sehr klein und eine Beachtung der eben genannten Ungleichung ist daher in der Regel überflüssig.

Hätten wir es mit einem Gas ohne Kondensation zu tun, so würden wir durch Heranziehen des ersten Hauptsatzes der Wärmelehre genügend Gleichungen für die Lösung der einfachen Stromfadentheorie von Lavaldüsen haben. Wir wollen daher auch bei unserem Problem das Gleichungssystem zuerst durch den ersten Hauptsatz vervollständigen. Zu diesem Zweck müssen wir uns vor allem überlegen, auf welche Arten bei der von uns behandelten Strömung Wärme produziert wird.

Am meisten in das Gewicht fällt natürlich die bei der Wasserkondensation freiwerdende Verdampfungswärme r. In der Zeiteinheit wird auf der Strecke $\mathrm{d}x$ die Wärmemenge $r\,\mathrm{d}G_3$ auf diese Weise frei. Ferner verursacht der Reibungswiderstand der Tropfen Wärmeerzeugung, welche gleich der an den Tropfen in der Zeiteinheit geleisteten Arbeit sein muß. Für einen Tropfen ist diese Größe gleich $W\cdot(w-w_3)$. Drittens nehmen wir an, daß die Wasserdampfteilchen, welche auf das Wasser auftreffen, unmittelbar abgebremst werden. Dadurch entsteht eine dem Carnotschen Stoßverlust entsprechende Wärmemenge. In der Zeiteinheit hat sie für die Strecke $\mathrm{d}x$ den Wert $\frac{1}{2}(w-w_3)^2\,\mathrm{d}G_3$. Bezeichnen wir mit e die innere Energie der Masseneinheit, so erhält der erste Hauptsatz folgende Gestalt:

$$f\cdot\varrho_1\cdot\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}t}+p_1\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}\right)+f\cdot\varrho_2\cdot\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}t}+p_2\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}\right)+f_3\cdot\varrho_3\cdot\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}t}$$
$$=r\cdot\mathrm{d}G_3+F\cdot\mathrm{d}x\cdot n\cdot W\cdot(w-w_3)+\frac{1}{2}(w-w_3)^2\cdot\mathrm{d}G_3\,.$$

Bedenken wir, daß wir für die zeitliche Änderung, die irgendeine einem Luftteilchen (oder Wasserteilchen) anhaftende Größe erfährt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, im stationären Zustand auch $w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ $\left(\text{bei Wasser } w_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ schreiben können, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}&G_1\left(\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}x}+p_1\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}x}\right)+G_2\left(\frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}x}+p_2\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}x}\right)+G_3\frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}x}\\&\quad=r\frac{\mathrm{d}G_3}{\mathrm{d}x}+G\frac{F}{f}\frac{n}{\varrho}W\left(1-\frac{w_3}{w}\right)+\frac{1}{2}(w-w_3)^2\frac{\mathrm{d}G_3}{\mathrm{d}x}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(5).$$

Nachdem aber die Verdampfungswärme r nach einem Resultat der klassischen Thermodynamik nichts anderes ist als die Differenz der Wärmeinhalte des gasförmigen und des flüssigen Aggregatzustandes

$$r=e_2+p_2v_2-(e_3+p_3v_3),$$

erhalten wir durch Multiplikation der ersten Bewegungsgleichung mit G und Addition der beiden Gl. (4) zu Gl. (5) unter Berücksichtigung der Kontinuitätsbedingungen

$$\frac{\mathrm{d}G_1}{\mathrm{d}x}=0\quad\text{und}\quad\frac{\mathrm{d}G_3}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{d}G_2}{\mathrm{d}x}$$

und der Gl. (1) und (2) das Resultat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[G\frac{w^2}{2}+G_3\frac{w_3^2}{2}+G_1(e_1+p_1v_1)+G_2(e_2+p_2v_2)+G_3(e_3+p_3v_3)\right]=0\quad\ldots\quad(6).$$

Die Energiegleichung erscheint uns demnach wieder in sehr einfacher Form, die dadurch charakterisiert ist, daß sie Ausdrücke, welche Reibungsgrößen enthalten, wie etwa den Tropfenwiderstand, nicht aufweist.

Unser Gleichungssystem ist noch nicht vollständig. Vor allem fehlen uns Angaben über die Größe der Kondensationsgeschwindigkeit $\frac{\mathrm{d}G_3}{\mathrm{d}x}$. Wir müssen wissen, wieviel Tropfen sich bilden und wie rasch die Tropfen wachsen. Die Geschwindigkeit der Tropfen läßt sich dann aus den gemessenen Widerstandswerten von Kugeln [5] leicht errechnen.

Die Gl. (3), (4) und (5), welche wir Grundgleichungen nennen wollen, bilden aber insofern ein einheitliches Gleichungssystem, weil hier nichts über die Zusammensetzung des Gases, über das Verhältnis von Wassermenge zu Gasmenge oder über die Kondensationsgeschwindigkeit vorausgesetzt ist. Man erhält aus diesem System den Spezialfall für Düsen, welche von reinem Wasserdampf und von Wasser durchströmt werden, indem man $\varrho_1=G_1=0$ setzt.

2. Kondensationsgeschwindigkeit. Beschäftigen wir uns zunächst mit der Kondensationsgeschwindigkeit eines einzelnen Tropfens, so sehen wir sofort ein, daß zwei physikalische

Vorgänge vor allem Einfluß auf das Tropfenwachstum haben müssen. Es muß erstens für den nötigen Massenstrom in Richtung auf den Tropfen gesorgt sein und zweitens muß dafür gesorgt sein, daß die Kondensationswärme abgeführt wird. Geschieht letzteres z. B. nicht, so würde der Tropfen allein schon durch Temperaturerhöhung die Sättigungsgrenze erreichen und aufhören zu wachsen. In der Art, wie der Wärmetransport und der Massentransport vor sich geht, sind wieder zwei Gebiete zu unterscheiden. Ein Gebiet unmittelbar an der Tropfenoberfläche, in dem wir molekulare Vorgänge zu berücksichtigen haben, und ein Gebiet im Gas, welches den Tropfen umgibt. Hier ist mit Wärmeleitungsvorgängen und allenfalls Diffusionsvorgängen zu rechnen.

Diese Betrachtung allein schon zeigt, daß wir bei der Ableitung der Kondensationsgeschwindigkeit den Fall, daß sich ein Tropfen in übersättigter feuchter Luft befindet, vom Fall, daß er sich im übersättigten Wasserdampf befindet, trennen müssen, wenn wir nicht allzu verwickelte Gleichungen haben wollen. Im ersten Fall wird nämlich der Wärmetransport in überwiegendem Maß von den Luftmolekülen besorgt und für den Massentransport spielt die Diffusion eine maßgebliche Rolle. Im zweiten Fall ist von Diffusion überhaupt keine Rede, der Wärmetransport wird aber von den Dampfmolekülen selbst besorgt.

Wir wollen uns in dieser Arbeit für die ausführliche Behandlung des leichteren Falles entscheiden. Dies ist die Kondensation kleiner Wassertropfen in reinem Wasserdampf. Es wird sich später zeigen, daß noch ein zweiter Grund für unseren Entschluß maßgebend ist. Wir werden auch sehen, daß schon eine verhältnismäßig rohe Kenntnis des Kondensationsvorganges zur Lösung unseres Problems ausreicht, wovon wir im folgenden Gebrauch machen wollen. Da der Luftanteil bei den folgenden Überlegungen wegfällt, können wir anstatt der Größen mit dem Index 2 einfach die Größen ohne Index schreiben.

Bei sehr kleinen Tropfen werden vor allem die molekularen Vorgänge an der Oberfläche maßgebend sein. Wir wollen uns daher zunächst mit dem vereinfachten Bild beschäftigen, daß ein kleiner Wassertropfen von der Temperatur T_ξ und dem dazugehörigen Sättigungsdruck p_ξ sich in Wasserdampf von konstanter Temperatur T und konstantem Druck p befindet. Der Wärmetransport geht dann wie bei stark verdünnten Gasen vor sich [6] und [7, S. 27]. Er beträgt pro Flächeneinheit und Zeiteinheit

$$\frac{3}{8} p \sqrt{3 \frac{R}{m} T} (T_\xi - T).$$

R ist die absolute Gaskonstante und m das Molekulargewicht. Nehmen wir an, daß von allen auf die Wasseroberfläche auftreffenden Dampfmolekülen γ Teilchen kondensieren und nennen wir diese Größe den Kondensationskoeffizienten, so errechnet sich die auf der Wasseroberflächeneinheit in der Zeiteinheit kondensierende Wassermenge zu [7, S. 9]

$$\gamma \frac{1}{4} \sqrt{3 \frac{m}{R T}} (p - p_\xi).$$

Die kondensierende Wassermenge, multipliziert mit der Verdampfungswärme r, muß nun den Wärmestrom geben. Das führt uns auf folgende Gleichung

$$\gamma r \frac{p - p_\xi}{p} = \frac{3}{2} \frac{R}{m} (T_\xi - T).$$

Um nun die Größe p_ξ zu eliminieren, linearisieren wir die Dampfdruckkurve an der Stelle des Druckes p und der dazugehörigen Sättigungstemperatur T_s und können dann mit Hilfe der Formel von Clausius und Clapeyron schreiben

$$T_\xi - T_s = (p_\xi - p) \frac{\mathrm{d} T}{\mathrm{d} p} = (p_\xi - p) \frac{T_s}{p} \frac{R}{m} \frac{T_s}{r}.$$

$\frac{\mathrm{d} p}{\mathrm{d} T}$ ist dabei die Ableitung des Sättigungsdruckes nach der Temperatur. Aus den letzten beiden Gleichungen lassen sich die Drucke entfernen und wir erhalten

$$\frac{T_s - T}{T_\xi - T} = 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{\gamma} \left(\frac{R}{m} \frac{T_s}{r}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Für γ müssen wir nach den jetzigen Messungen einen Wert von etwa 3 % annehmen [8] und [9, S. 195].

Die letzte Gleichung zeigt aber, daß auch bei diesem Wert von γ zwischen den beiden Temperaturdifferenzen $T_\xi - T$ und $T_s - T$ nur ein Unterschied von etwa 25 % entsteht.

Für die Massenzunahme eines Tropfens muß nun folgende Gleichung bestehen

$$r \frac{\mathrm{d} M_\xi}{\mathrm{d} t} = 4 \pi \xi^2 \frac{3}{8} p \sqrt{3 \frac{R}{m} T} (T_\xi - T) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Die an der Tropfenoberfläche freiwerdende Wärmemenge muß gleich der abgeführten Wärmemenge sein. Durch Ausdrücken von M_ξ durch ξ erhalten wir dann leicht

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{3}{8}\frac{p}{r\varrho_3}\sqrt{3\frac{R}{m\,T}}(T_\xi - T) \quad \text{. . . . . (8).}$$

Bedienen wir uns noch der Abkürzung

$$\lambda = \frac{3}{8}\frac{1}{r}\frac{R}{m}\sqrt{3\frac{R}{m}T} \quad \text{. . . . . (8a).}$$

dann können wir die Gleichung für die Kondensationsgeschwindigkeit eines Tropfens in Wasserdampf auch schreiben

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{\lambda}{\varrho_3}\varrho\frac{(T_\xi - T)}{w_3} \quad \text{oder} \quad \frac{dM_\xi}{dx} = 4\pi\xi^2\lambda\varrho\frac{T_\xi - T}{w_3} \quad \text{. . . . . . . (8a).}$$

Hätten wir uns gar nicht um die molekulare Struktur des Gases gekümmert und einfach angenommen, daß die Kondensationswärme durch Wärmeleitung abgeführt würde, so hätten wir bei konstant gehaltener Übersättigung $T_\xi - T$ folgendes Tropfenwachstumsgesetz erhalten

$$\xi = \sqrt{\frac{2k(T_\xi - T)}{r\varrho_3}t} \quad \text{. . . . . (9).}$$

k ist das Wärmeleitvermögen des Dampfes, T die Temperatur in weiter Entfernung vom Tropfen. Die höchsten Unterkühlungen, die in Düsen auftreten, liegen bei etwa 30°. Wir erhalten bei Einsetzen von Zahlenwerten folgende Abhängigkeit der Tropfengröße ξ von der Zeit, diese stets in Sekunden gemessen,

$$\xi = 0{,}9 \cdot 10^{-1}\,t \quad \text{. . . . . (8b)}$$

und

$$\xi = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\sqrt{t} \quad \text{. . . . . (9a).}$$

Diesen beiden Gleichungen können wir entnehmen, daß die aus makroskopischen Überlegungen gewonnene Formel (9) das Tropfenwachstum in den ersten Zeitmomenten nach Entstehen des Tropfens viel zu groß angibt. Hingegen liefert für lange Zeiten die Formel (8) zu große Werte. Der Übergang beider Gesetze liegt bei der angenommenen Übersättigung bei einer Tropfengröße von etwa $\xi \sim 10^{-4}$ cm. Diese Tropfengröße wird in einer Zeit von ungefähr $t \sim 10^{-3}$ sec erreicht. Bei Überschallgeschwindigkeiten dürfen wir also ohne weiteres einige cm nach dem Entstehen des Tropfens mit Formel (8) rechnen.

Nachdem der Wärmeleitungseinfluß im Gebiet des uns interessierenden Tropfenwachstums eine bedeutend größere Wachstumsgeschwindigkeit zuläßt, ist nun auch die Berechtigung der Annahme erwiesen, für unseren Fall im Tropfen umgebenden Gas die Temperatur als konstant gleich T anzusetzen.

Den Einfluß der Oberflächenkrümmung des Tropfens auf die Dampfspannung lassen wir in unserer Formel unberücksichtigt. Wir erhalten dadurch für die eben entstehenden Tröpfchen mit Radien von etwa $\xi \sim 10^{-7}$ cm wahrscheinlich ein zu großes Tropfenwachstum, doch werden wir sehen, daß wir uns diese Ungenauigkeit erlauben können. Außerdem können wir damit rechnen, daß sich der stationäre Temperatursprung an der Tropfenoberfläche $T_\xi - T$ so rasch einstellt, daß wir auch bei veränderlichen Werten von T in der Düse die Vorgänge als quasistationär betrachten können und die Formel (8) daher auch für ortsabhängige $T_\xi - T$ verwenden dürfen.

Nachdem wir uns ein beiläufiges Maß für die Geschwindigkeit, mit der ein Tropfen vom Radius $\xi \ll 10^{-4}$ cm in Wasserdampf wächst, verschafft haben, müssen wir uns vor allem der Frage zuwenden, welche Tropfenzahlen wir in einer Düse annehmen dürfen. Bekanntlich sind bei den geringen Übersättigungen, wie sie etwa in der Atmosphäre anzutreffen sind, zur Tropfenbildung Staubteilchen, die sogenannten Kondensationskerne, nötig. Wir wollen zeigen, daß diese bei den Überlegungen über die Kondensationserscheinungen in Lavaldüsen ohne Bedeutung sind.

Nehmen wir an, wir ließen ein Gasvolumen mit der starken Unterkühlung von 30° eine Wegstrecke von 10 cm in einer Lavaldüse durcheilen. Für diesen Weg stünde dem Teilchen eine Zeit von etwa $3 \cdot 10^{-4}$ sec zur Verfügung. Die Tropfengröße kann nach Gl. (8a) dabei etwa $\xi = 3 \cdot 10^{-5}$ cm erreichen. Nehmen wir an, es befänden sich die große Zahl von 100000 Kondensationskernen im cm³, so würde in diesem Volumen auf der 10 cm langen Strecke eine Wassermenge von etwa

$$\frac{4\pi}{3}\xi^3\varrho_3 n = 10^{-8}\frac{g}{\text{cm}^3}$$

kondensieren. Das heißt bei mittleren Dampfdichten von $\varrho = 10^{-3}$ C. G. S. E. würde auf einer Strecke von 10 cm bei 30° Unterkühlung nur $^1/_{100000}$ des Wasserdampfes an Kondensationskernen ausfallen! Wir können es uns wohl ersparen, zu zeigen, daß die dabei freiwerdende Kondensationswärme keine Rolle spielen kann.

Wir haben also bei der Ausdehnung von Wasserdampf (dasselbe läßt sich auch leicht für feuchte Luft zeigen) trotz Anwesenheit von Kondensationskernen dieselben Verhältnisse vor uns, wie bei der adiabatischen Ausdehnung kondensationskernfreien Dampfes in einer Nebelkammer. Hiermit ist die Frage nach dem Grund der starken Unterkühlungen in Überschalldüsen beantwortet und wir müssen uns nun die Frage vorlegen, wieso es schließlich trotzdem im Überschallteil der Düse zur Nebelbildung kommt.

Diese Frage führt uns auf eine andere bereits bekannte Erscheinung. Befindet sich ein gesättigtes von Kondensationskernen freies Gas in einer Wilson-Kammer und übersättigen wir dieses durch rasche Expansion, so tritt keine Kondensation ein, wenn die Übersättigung nicht allzu groß ist. Expandieren wir aber so stark, daß der Gasdruck etwa den vierfachen Betrag des Sättigungsdruckes erreicht, so bricht das übersättigte System in jedem Fall zusammen. Auch bei Dampfdüsen finden wir den Kondensationsbeginn bei etwa vierfacher Übersättigung und wir müssen demnach vermuten, daß wir die Erscheinung des Zusammenbrechens des übersättigten Systems, welche wir in der Nebelkammer in ihrer zeitlichen Aufeinanderfolge nur schwer erfassen können, bei der stationären Strömung von Wasserdampf durch eine Lavaldüse in örtlicher Aufeinanderfolge vor uns abgerollt sehen.

Der Schluß, daß Kondensation nur an Staubteilchen stattfinden kann, beruht auf der Anwendung der Formeln von Thomson und Gibbs für den Dampfdruck über gekrümmten Oberflächen

$$\frac{p}{p_s} = e^{\frac{m}{R T \varrho_3} \frac{2\sigma}{\xi}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

(p_s ist dabei der zu T gehörige Sättigungsdruck und σ ist die Oberflächenspannung des Wassers) auf beliebig kleine Tropfen. Die Formel muß dort ihre Gültigkeit verlieren, wo es sich um molekulare Vorgänge handelt und wir das Gebiet der Kontinuitätsphysik verlassen. In einem Gas kommen nämlich dauernd Moleküle in das Gebiet gegenseitiger Molekularkräfte, wir sagen, sie stoßen zusammen, und es kommt auch immer wieder vor, daß drei und mehr Moleküle sich gleichzeitig im Bereich gegenseitiger Kräfte befinden. Wir können das auch so ausdrücken, daß wir sagen, es bilden sich dauernd Tropfen von der Masse mehrerer Moleküle, im allgemeinen zerfallen diese Tropfen aber wieder. Die Zunahme eines Tropfens um ein Molekül in der Zeiteinheit ist dabei im Mittel dem Produkt aus seiner Oberfläche und dem Gasdruck proportional zu setzen, die Abnahme eines Tropfens um ein Molekül in der Zeiteinheit ist dabei wieder proportional seiner Oberfläche zu setzen und außerdem dem Dampfdruck des Tropfens p_ξ. Daraus ergibt sich, daß ein Tropfen um so eher erhalten bleibt, je mehr er durch zufälliges Auftreffen von Molekülen bereits angewachsen ist und wenn schließlich ein Tropfen so groß geworden ist, daß sein Dampfdruck p_ξ kleiner als der Gasdruck ist, so wird er im allgemeinen nicht mehr zerfallen. Diese Tropfenbildung in einem übersättigten System wurde von Becker und Döring [10] berechnet. Die Verfasser nennen Tropfen, welche so groß sind, daß sie nicht mehr zerfallen, Kondensationskeime. Die Bildungszahl solcher stabiler Tropfen in der Zeit- und Raumeinheit, die sogenannte Keimbildungshäufigkeit J, berechnen sie zu

$$J = \frac{4}{3} Z \frac{a}{N_g} e^{-\frac{4\pi}{3} a^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Dabei ist:

$$a^2 = \left(\frac{\sigma m}{R T \varrho_3}\right)^3 \frac{N_3}{\ln^2 \frac{p}{p_s}} \quad \text{und} \quad Z = 8 \sqrt{\frac{\pi}{\varkappa}} \, \xi_1^2 \, N^2 \, \bar{c} .$$

N_3 ist die Zahl der Dampfmoleküle in der Volumeinheit Wasser, Z ist die Zahl der gaskinetischen Zusammenstöße in der Raum- und Zeiteinheit, also die Bildungszahl von „Tropfen" in der Raum- und Zeiteinheit, welche aus zwei Molekülen bestehen. ξ_1 ist der Radius eines Dampfmoleküls und $\bar{c}$ seine mittlere Geschwindigkeit. N_g ist die Anzahl der Moleküle in einem Tropfen, der so groß ist, daß er bei der vorgegebenen Übersättigung mit dem Wasserdampf gerade im Gleichgewicht ist.

Der charakteristische Teil dieser Formel ist die e-Potenz. Die Abhängigkeit von Z, a und N_g von den Übersättigungsverhältnissen ist gegenüber der Abhängigkeit der e-Potenz von diesen Größen ganz bedeutungslos. Wenn wir etwa die Änderung der verschiedenen Größen bei Unterkühlung durch adiabatische Ausdehnung untersuchen, so sehen wir, daß die e-Potenz bei einer Temperaturerniedrigung von 2° in dem uns bei Wasserdampf interessieren-

den Gebiet auf den fünf- bis zehnfachen Betrag anwächst, während sich die Größen Z, α und N_g nur um einige Prozent ändern. Es kommt also gar nicht auf eine genaue Bestimmung der Größen vor der e-Potenz an. Eine Ungenauigkeit hier von der Größe des Faktors 2 wird dadurch kompensiert, daß die Erscheinung theoretisch bei einer um den Bruchteil eines Grades geänderten Temperatur beginnt. Gewisse Grenzen sind der Genauigkeit vor allem dadurch gesetzt, daß die Oberflächenspannung σ in der dritten Potenz im Exponenten von e vorkommt. Eine genaue Berechnung verlangt also vor allem auch eine genaue Kenntnis der Größe σ. Dies ist der gewichtigste Grund, weshalb wir zum Vergleich für die Theorie das Beispiel von Wasserdampfdüsen heranziehen. Beim Absaugen von feuchter Luft durch Überschalldüsen bricht die Übersättigung bei so tiefen Temperaturen zusammen, daß wir es, falls unterkühlte Wassertropfen entstehen, mit für diese tiefen Temperaturen unbekannten Oberflächenspannungen zu tun haben. Nehmen wir aber an, es entstünden Eisteilchen, so hätten wir für σ die mittlere Oberflächenenergie der Eiskristalle zu setzen, über die man noch weniger weiß. Der Spielraum, den uns die Extrapolation aus den bekannten Werten der Oberflächenspannung des Wassers bei höheren Temperaturen gewährt, genügt vollauf, um den theoretischen Kondensationsbeginn mit dem praktischen Kondensationsbeginn durch entsprechende Wahl des σ zur Deckung zu bringen.

Die von Becker und Döring errechnete Keimbildungshäufigkeit ist allerdings unter der Voraussetzung stationärer Übersättigungsverhältnisse gewonnen. Wir werden diese Formel dann für veränderliche Verhältnisse anwenden können, wenn die Entstehungszeit eines stabilen Tropfens so klein ist, daß sich die Übersättigungsverhältnisse in dieser Zeitspanne nur unbedeutend ändern. Bei den Übersättigungsverhältnissen in Dampfdüsen ist die Molekülanzahl eines Tropfens, welcher mit dem Dampf im Gleichgewicht ist, N_g ungefähr 30. Das heißt, sein Radius ist rund dreimal so groß als der Molekülradius, also etwa gleich $5 \cdot 10^{-8}$ cm. Die Entstehungszeit so eines Tropfens beträgt nach Formel (8b) etwa $5 \cdot 10^{-7}$ sec, d. h. er entsteht auf einer Wegstrecke von rd. $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ cm. Wenn die Genauigkeit der Formel (8b) für so kleine Tropfen auch durchaus anzweifelbar ist, so können wir doch annehmen, daß sich die Zustandsgrößen während der Entstehungszeit eines Tropfens in der Düse so wenig ändern, daß wir auch die Keimbildung als quasistationär behandeln können und daher die Formel (11) verwenden dürfen. Wegen der kurzen Entstehungszeit stabiler Tropfen wollen wir im folgenden auch keinen Unterschied zwischen Tropfen vom Radius 0 oder vom Radius eines Tropfens, welcher mit dem Dampf im Gleichgewicht ist, machen. Die Tropfenradien nehmen nach Formel (8) für $\xi \ll 10^{-4}$ cm proportional mit der Zeit, d. h. im wesentlichen mit dem Abstand von ihrem Entstehungsort zu. Ihre Masse nimmt also ungefähr mit der dritten Potenz des Abstandes vom Tropfenentstehungsort zu, und für die freiwerdende Wärme sind daher vor allem die großen Tropfen maßgebend, für welche die besprochene Vernachlässigung ohne Bedeutung ist.

Nachdem wir die Keimbildungshäufigkeit J als bekannt voraussetzen dürfen, ist es uns nun möglich, nach Formel (3a) die Zunahme der Tropfenzahl in der Raumeinheit pro Wegeinheit, die das Volumenelement zurücklegt, anzugeben. Auch für die Kondensationsgeschwindigkeit jedes einzelnen Tropfens haben wir ein Maß gefunden und es muß uns daher möglich sein, die noch fehlende Größe $\frac{\mathrm{d}\,G_3}{\mathrm{d}\,x}$ zu berechnen. Denken wir uns an irgendeine Stelle x der Düse versetzt, an der schon wesentliche Kondensation stattfinden soll. Hier werden wir verschiedene Tropfengrößen vorfinden entsprechend den verschiedenen Entstehungsorten x' der Tropfen. Diejenigen Tropfen, welche an einem Ort entstanden sind, wo x' einen kleineren Wert hat, werden an der Stelle x größer sein als diejenigen, welche an einer Stelle x' entstanden sind, die sich näher an x befindet. Die Tropfenmasse M_ξ ist daher eine Funktion von x und x'. Greifen wir an der Stelle x' ein Gebiet von der Breite $\mathrm{d}\,x'$ heraus, so entstehen dort in der Zeiteinheit $J \cdot f \cdot \mathrm{d}\,x'$ Tropfen, und da wir einen stationären Vorgang betrachten, müssen an der Stelle x in der Zeiteinheit ebenfalls $J \cdot f \cdot \mathrm{d}\,x'$ Tropfen hindurchwandern, welche zwischen x' und $x' + \mathrm{d}\,x'$ entstanden sind. Der Beitrag, der von diesem Ort herstammenden Tropfen zur Durchflußmenge G_3 an der Stelle x ist demnach $M(x, x')\, J(x') \cdot f(x')\, \mathrm{d}\,x'$ und daher die Durchflußmenge

$$G_3 = \int_{-\infty}^{x} M(x', x)\, J(x')\, f(x')\, \mathrm{d}\,x' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12).$$

Die Zunahme der Durchflußmenge in der Achsenrichtung ist daher, weil für $x' = x$, $M_\xi = 0$ und für $x' = -\infty$ $J = 0$ ist,

$$\frac{\mathrm{d}\,G_3}{\mathrm{d}\,x} = \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}\,M_\xi}{\mathrm{d}\,x}\, J(x')\, f(x')\, \mathrm{d}\,x' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12\mathrm{a}).$$

Diese Formel gilt ganz allgemein für alle Überschalldüsen, da bei diesen die Kondensationskerne nie eine Rolle spielen. Erst durch Einsetzen der Kondensationsgeschwindigkeit für Wassertropfen in Dampf oder in feuchter Luft wird Gl. (12a) spezialisiert. Wir sehen auch, daß für die Richtigkeit der Kondensationsgeschwindigkeit $\frac{\mathrm{d}\,G_3}{\mathrm{d}\,x}$ die Multiplikation der Größe $\frac{\mathrm{d}\,M_\xi}{\mathrm{d}\,x}$ mit einem Faktor von der Größenordnung der Einheit recht bedeutungslos ist, da das auf dasselbe herauskommt wie eine ungenaue Bestimmung des Faktors vor der e-Potenz in der Keimbildungshäufigkeit J. Daher können wir uns auch beträchtliche Ungenauigkeiten bei der Ableitung der Kondensationsgeschwindigkeit erlauben. Wesentlich ist es für die Größe $\frac{\mathrm{d}\,G_3}{\mathrm{d}\,x}$ aber, in welche Abhängigkeit man den Tropfenradius von der Bildungszeit t stellt, ob man ihn also proportional t oder proportional $\sqrt{t}$ setzt.

Wir erhalten nun die Kondensationsgeschwindigkeit in Wasserdampf, indem wir die Gl. (8a) in Gl. (12a) einsetzen. Dabei dürfen wir, wie wir gesehen haben, anstatt $T_\xi - T$ die Größe $T_s - T$ einsetzen, da sich diese nur um rd. 25 % unterscheiden (Gl. (7)). Wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\,G_3}{\mathrm{d}\,x} &= 4\pi\lambda\varrho\,\frac{T_s - T}{w_3}\int_{-\infty}^{x}\xi^2\,J\,f\,\mathrm{d}\,x' \\ \text{und}\qquad \xi &= \lambda\int_{\xi=0}^{x}\frac{\varrho}{\varrho_3}\,\frac{T_s-T}{w_3}\,\mathrm{d}\,x' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13).$$

Die Keimbildungshäufigkeit J ist dabei Gl. (11) und die Größe λ Gl. (8a) zu entnehmen. Die Frage nach der Kondensationsgeschwindigkeit wäre hiermit beantwortet.

3. Gleichungssystem für Düsen mit Kondensation. Um einen möglichst handlichen Formelapparat zu haben, wollen wir im folgenden noch einige sehr einleuchtende Vereinfachungen machen, die sowohl für Wasserdampf wie für feuchte Luft Gültigkeit haben.

Wir sahen, daß die Kondensationskerne bei Überschalldüsen keine Rolle spielen können. Der Dampf dehnt sich daher zunächst trocken-adiabatisch aus, bis er eine so starke Übersättigung erreicht, daß außerordentlich starke Keimbildung einsetzt, die zum Zusammenbrechen des unterkühlten Zustandes führt. Diese starke Abnahme der Unterkühlung unterbindet dann jede weitere Keimbildung. Im übrigen Teil der Düse wachsen dann die an der Stelle des Zusammenbrechens gebildeten Keime zu Tropfen steigenden Durchmessers an. Erst im Überschallgebiet wird die Keimbildung wesentlich, wie sich leicht abschätzen läßt. Die Düse hat also dieselbe Durchflußmenge wie wenn keine Kondensation stattfinden würde.

Bei dem späten Kondensationsbeginn in Dampfdüsen sind die erreichten Tropfengrößen außerordentlich klein, so daß auch der im vorigen Abschnitt für bestimmte Bedingungen errechnete Wert von $\xi = 3 \cdot 10^{-5}$ cm als viel zu hoch gegriffen angesehen werden muß. So kleine Tropfen machen auch die starke Beschleunigung in Überschalldüsen praktisch vollkommen mit [11]. Wir können in unseren Gleichungen also stets setzen:

$$w_3 = w \quad \text{und} \quad W = 0\,.$$

Es kondensiert ferner bis zu hohen Machschen Zahlen stets nur ein Bruchteil des Wasserdampfes. Wir finden z. B., daß auch unter der Annahme, es fiele stets so viel Wasser aus, daß ständig Sättigung herrscht, an der engsten Stelle erst etwa 3 % des Dampfes kondensiert ist. Da die Geschwindigkeiten von Wasser und Dampf gleichzusetzen sind, das Wasser aber rund die tausendfache Dichte des Dampfes hat, können wir ohne weiteres f_3 gegen f vernachlässigen und daher schreiben

$$f = F\,.$$

Wir nehmen ferner für den Dampf die ideale Zustandsgleichung als gültig an und bekommen daher nach einigen Umformungen, indem wir die Durchflußmengenverhältnisse (Gl. (2a)) einführen, folgende Gleichungen

$$\frac{1}{w}\frac{\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,x} + \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}\,\varrho}{\mathrm{d}\,x} + \frac{1}{1-g_3}\frac{\mathrm{d}\,g_3}{\mathrm{d}\,x} = -\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,x} \qquad \text{Kontinuitätsgleichung.}$$

$$\frac{1}{w}\frac{\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,x} + \frac{1}{w^2}\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x} = 0 \qquad \text{Impulsgleichung.}$$

Anstatt des ersten Hauptsatzes nehmen wir der Einfachheit halber die Energiegleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{w^2}{2} + g_1 c_{p1} T + g_{23} c_{p2} T - r g_3\right) = 0 \qquad \text{Energiegleichung,}$$

$$\frac{\mathrm{d} g_3}{\mathrm{d} x} = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d} M_\xi}{\mathrm{d} x} J \frac{f}{G_1 + G_{23}} \mathrm{d} x' \qquad \text{Kondensationsgleichung.}$$

Wir wollen nun die Machsche Zahl in bekannter Weise einführen, indem wir schreiben

$$\mathrm{Ma}^2 = \frac{w^2}{\varkappa \frac{p}{\varrho}}\text{ [2]}.$$

Die Schallgeschwindigkeit in Nebel hängt allerdings von der Frequenz ab [7]. Wir wollen die Machsche Zahl auf die Schallgeschwindigkeit für hohe Frequenzen $\sqrt{\varkappa \frac{p}{\varrho}}$ beziehen. Ferner bezeichnen wir mit spezifischer Wärme bei konstantem Druck die Größe von c_p, bevor Kondensation eintritt

$$c_p = g_1 c_{p1} + g_{23} c_{p2} .$$

Bei Besprechung der Keimbildungszahl J haben wir gesehen, daß es auf den Ausdruck vor der e-Potenz gar nicht so sehr ankommt. Der größte Teil der Keimbildung erstreckt sich auf ein kleines Gebiet im Beginn des Zusammenbrechens der Übersättigung, in welchem sich die Werte von f, w und ϱ nur wenig ändern und in dem mengenmäßig noch sehr wenig kondensiert ist. Wir können also setzen

$$G_1 + G_{23} = \varrho_k \cdot w_k \cdot f_k ,$$

wobei die Indizes k auf die charakteristische Stelle des Kondensationsbeginnes hinweisen sollen. In der Kondensationsgleichung fällt dann das f_k und das f weg. Wir bekommen so das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{w}\frac{\mathrm{d} w}{\mathrm{d} x} + \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d} x} = -\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x} - \frac{1}{1-g_3}\frac{\mathrm{d} g_3}{\mathrm{d} x} && \text{Kontinuitätsgleichung}\\
&\varkappa\, \mathrm{Ma}^2 \frac{1}{w}\frac{\mathrm{d} w}{\mathrm{d} x} + \frac{1}{p}\frac{\mathrm{d} p}{\mathrm{d} x} = 0 && \text{Impulsgleichung}\\
&(\varkappa - 1)\, \mathrm{Ma}^2 \frac{1}{w}\frac{\mathrm{d} w}{\mathrm{d} x} + \frac{1}{p}\frac{\mathrm{d} p}{\mathrm{d} x} - \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d} x} = \frac{1}{c_p T}\frac{\mathrm{d}(r g_3)}{\mathrm{d} x} && \text{Energiegleichung}\\
&\frac{\mathrm{d} g_3}{\mathrm{d} x} = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d} M_\xi}{\mathrm{d} x} \frac{J}{\varrho_k\, w_k} \mathrm{d} x' && \text{Kondensationsgleichung}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \text{(I)}$$

und speziell für Wasserdampfdüsen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d} g_3}{\mathrm{d} x} &= 4\pi\lambda\varrho \frac{T_s - T}{w} \int\limits_{-\infty}^{x} \xi^2 \frac{J}{\varrho_k\, w_k} \mathrm{d} x'\\
\xi &= \frac{\lambda}{\varrho_3} \int\limits_{\xi=0}^{x} \varrho \frac{T_s - T}{w} \mathrm{d} x'
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \text{(13a)}.$$

Das Gleichungssystem (I) gibt eine sehr genaue Beschreibung des Kondensationsvorganges. Wir können aber im allgemeinen noch zwei weitere Vernachlässigungen zulassen, indem wir die Verdampfungswärme als konstant ansehen und $g_3 \ll \frac{r}{c_p T}$ setzen. Wir machen von dieser Vereinfachung Gebrauch, lösen das Gleichungssystem (I) auf und erhalten

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{w}\frac{\mathrm{d} w}{\mathrm{d} x} &= \frac{1}{\mathrm{Ma}^2 - 1}\left[\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x} - \left(\frac{r}{c_p T} - 1\right)\frac{\mathrm{d} g_3}{\mathrm{d} x}\right]\\
\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d} p}{\mathrm{d} x} &= -\frac{\varkappa\, \mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Ma}^2 - 1}\left[\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x} - \left(\frac{r}{c_p T} - 1\right)\frac{\mathrm{d} g_3}{\mathrm{d} x}\right]\\
\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d} x} &= -\frac{\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Ma}^2 - 1}\left[\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x} + \frac{\mathrm{d} g_3}{\mathrm{d} x} - \frac{1}{Ma^2}\frac{r}{c_p T}\frac{\mathrm{d} g_3}{\mathrm{d} x}\right]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \text{(II)}.$$

[2]) $\varkappa$ ist das Verhältnis der spezifischen Wärmen.

Diese Gleichungen gelten mit ausreichender Genauigkeit für Düsen, welche von feuchter Luft oder von Wasserdampf durchströmt werden. Die Düsenform, also die Größe $\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, muß natürlich gegeben sein. Zusammen mit den entsprechenden Kondensationsgleichungen, für Wasserdampf also Gl. (13a), bilden sie eine vollständige Beschreibung der besprochenen Vorgänge.

Wir wollen den Gl. (II) sofort ein qualitatives Resultat entnehmen. Die Kondensation im Überschallgebiet verringert das Druckgefälle und kann für $\left(\frac{r}{c_p T}-1\right)\frac{\mathrm{d}g_3}{\mathrm{d}x} > \frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ sogar einen Druckanstieg verursachen, ein Resultat, dessen Bestätigung man sich aus den Versuchen leicht holen kann.

4. Anwendung der Theorie und Vergleich mit Experimenten. Messungen mit trockener Luft haben gezeigt, daß man die Verdrängung durch die Grenzschicht auch in sehr kleinen Düsen noch vernachlässigen kann und daher die Druckkurven allein schon aus den Düsenabmessungen mit ziemlich großer Genauigkeit bekommt. Anders ist es, wenn durch irgendeine Einlaufstörung der glatte Strömungsverlauf in der Düse gestört ist, wie es bei den Versuchen von Binnie und Woods der Fall ist. Hier darf man nicht mehr die Düsenabmessungen für die Durchrechnung einer Druckkurve mit Kondensation verwenden. Man muß vielmehr fiktive Düsenabmessungen aus Druckkurven von Versuchen, bei welchen die Kondensation erst an einer weiter stromabwärts gelegenen Stelle eintritt, errechnen und mit diesen in die Gl. (II) eingehen. Man muß also die Düse mit Dampf, bei welchem der Kondensationsbeginn möglichst herausgeschoben ist, „kalibrieren".

Wir wollen nun unser Gleichungssystem dazu verwenden, den Verlauf des Druckes in einer Düse mit Kondensation schrittweise zu berechnen. Dabei kommt es uns sehr zustatten, daß die Strömung bis in das Überschallgebiet hinein genau so verläuft wie bei trockenadiabatischer Ausdehnung. Wir werden die Stelle unseres Rechnungsbeginnes womöglich knapp vor dem Kondensationsbeginn auswählen, was sich durch Abschätzen der nötigen Kondensationskeimzahlen machen läßt. Zunächst müssen wir unter der Annahme trockenadiabatischer Ausdehnung die Werte der Zustandsgrößen, der Geschwindigkeit, der Unterkühlung usw. errechnen. Es ist gut, dies an einigen Stellen zu machen, bei denen die Kondensation noch unbedeutend ist, da man auf diese Weise dann das Entstehen der ersten Tropfen und hiermit die Größe $\frac{\mathrm{d}g_3}{\mathrm{d}x}$ nach Gl. (13a) mit Berücksichtigung von (8a) und (11) leicht ermitteln kann. Haben wir diese Größe an der Stelle x_i, so können wir die Zuwächse von Druck, Dichte usw. an dieser Stelle mit Hilfe der Gl. (II) gewinnen und so wieder die Zustandsgrößen an der Stelle $x_i + \mathrm{d}x$ errechnen. Mit Hilfe der Größen an der Stelle $x_i + \mathrm{d}x$ finden wir wieder die Kondensationsgeschwindigkeit $\frac{\mathrm{d}g_3}{\mathrm{d}x}$ und können nun mit unserer Rechnung fortfahren. Man kann das Verfahren dadurch verfeinern, daß man die Größe $\frac{\mathrm{d}g_3}{\mathrm{d}x}$, die sich ziemlich rasch ändern kann, an den Zwischenstellen der Schritte berechnet. Hingegen dürfte es keinen Vorteil haben, eine kompliziertere Theorie der schrittweisen Berechnung zu verwenden, da man wegen der starken Veränderlichkeit der Funktion J an sehr kleine Schritte gebunden ist. Erst an einer Stelle, an der die Keimbildung vollkommen aufgehört hat, kann man zu größeren Schritten übergehen.

Über den Arbeitsaufwand ist zu sagen, daß für einen geübten Rechner etwa 1 bis 2 Stunden zur Ausrechnung eines Schrittes notwendig sind. Die Schrittgröße betrug bei meinen Rechnungen bei dem großen Druckgefälle der Versuche von Yellott $^1/_2$ mm, bei dem weniger starken Druckgefälle der Experimente von Binnie und Woods 1 mm am Ort der Keimbildung und starker Änderung des Druckgradienten. Nach dem Abklingen der Keimbildung wurden an Stelle von wenig veränderlichen Druckgradienten größere Schritte gemacht. Bild 2 zeigt Druckkurven von Yellott und die errechneten theoretischen Kurven. Sie stimmen innerhalb der Meßgenauigkeit, welche bei diesem Verfasser nicht sehr groß ist, mit den Experimenten überein. Es wurde hier absichtlich keine dimensionslose Auftragung gewählt, um die Kurven besser trennen zu können. In dimensionsloser Auftragung fallen die Druckkurven im Gebiet vor der Kondensation aufeinander, die Versuchspunkte zeigen aber beträchtliche Streuung. Der starke Druckanstieg auf der rechten Seite der Zeichnung hat mit Kondensation nichts zu tun, sondern rührt von einem Verdichtungsstoß her. Bild 2a zeigt die Tropfenzahl, bezogen auf die Volumeinheit des Entstehungsortes $\frac{n}{\varrho}\varrho_k$, sowie die Änderung dieser Größe mit der Fortschreitungsrichtung für die beiden Versuche. Dieser

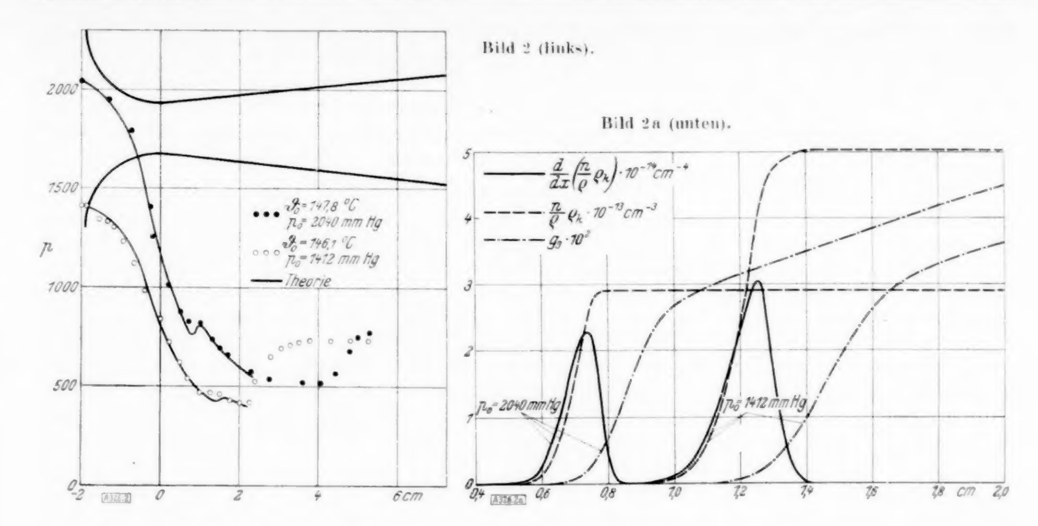


Bild 2 (links).

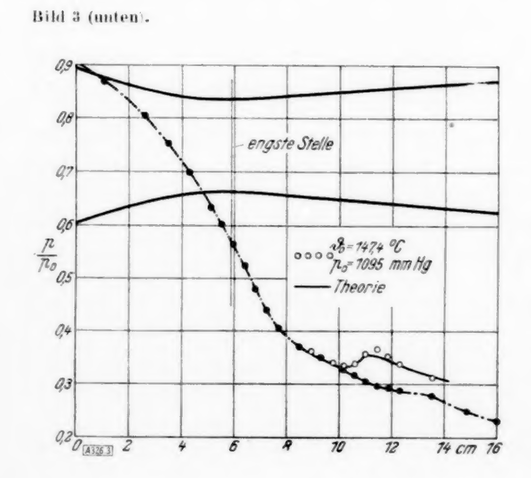
Bild 2a (unten).

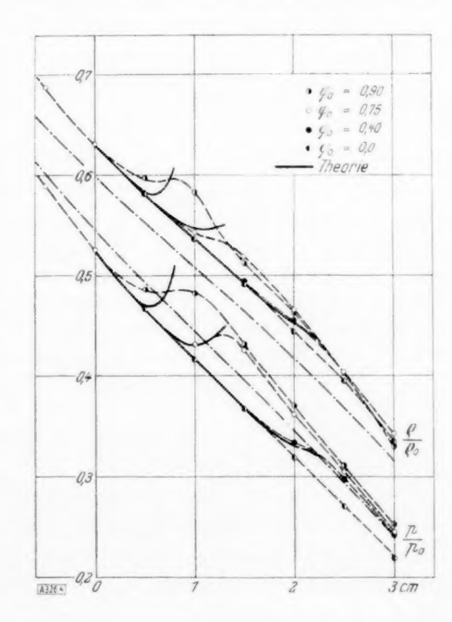
etwas komplizierte Ausdruck hat gegenüber der Zahl n den Vorteil, nur dort seinen Wert zu ändern, wo Keimbildung stattfindet. Ferner zeigt das Bild die Zunahme des Wassergehaltes g_3 als Verhältnis von Wasserdurchflußmenge zur gesamten Durchflußmenge. Man kann aus diesen Daten eine mittlere Tropfengröße von etwa $\xi = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ cm berechnen. Allerdings kommen sehr verschiedene Tropfengrößen vor. Yellott und Holland [4] finden auch, daß die Tropfengröße klein gegen die Wellenlänge des blauen Lichtes sei. Während der Kurve von g_3 beträchtliche Genauigkeit zukommen dürfte, es könnte sonst auch nicht die gute Übereinstimmung mit den Experimenten zustande kommen, dürfen wir an die anderen beiden Kurven keine allzu großen quantitativen Ansprüche stellen, weil ihre Richtigkeit mit dem Tropfenwachstumsgesetz in Zusammenhang steht. Bild 3 zeigt einen Versuch von Binnie und Woods. Die schwarzen Punkte sind Mittelwerte der Druckmessungen von Versuchen, bei denen noch keine Kondensation stattfindet. Diese wurden zum „Kalibrieren" der Düse verwendet. Die Versuche dieser Verfasser sind sehr genau und die Abweichungen der Theorie scheinen hier nicht innerhalb der Meßgenauigkeit zu liegen.

Trotzdem muß die gute Übereinstimmung der Theorie mit den Experimenten überraschen. Erstens ist bei den Versuchen von Binnie und Woods mit Ablösungserscheinungen am Orte des starken Druckanstieges zu rechnen. Dies hat eine Einengung der Düse zur

Bild 4 (rechts).

Bild 3 (unten).





Folge. Es ist also wahrscheinlich, daß die von uns verwendeten Werte des Düsenquerschnitts nicht ganz richtig sind. Zweitens ist es von vornherein gar nicht sicher, daß die an ruhiger Wasseroberfläche gemessene Oberflächenspannung mit derjenigen an so rasch entstehenden Tropfen übereinstimmt und wir hätten uns nicht wundern dürfen, wenn die theoretischen Kurven systematische Abweichungen nach einer Seite gezeigt hätten, welche bereits durch einen geringen Fehler in σ verursacht hätten sein können.

Außer den hier gezeigten drei theoretischen Kurven wurden bisher keine Experimente nachgerechnet. Die drei Versuche sind aber voneinander wesentlich verschieden und es ist daher nicht zu erwarten, daß noch Diskrepanzen von Theorie und Experiment auftreten. Bild 4 zeigt meine eigenen Versuche mit trockener und feuchter Luft. Auch hier wurde ein theoretischer Druck- und Dichteverlauf errechnet, indem ich ein Wachsen des Tropfenradius proportional zur Entstehungszeit und zur Dampfdichte annahm. Dieses Gesetz dürfte beim Entstehen der Tropfen erfüllt sein, da die Sättigungsdichte gegenüber der Dampfdichte an diesen Stellen tiefer Temperatur bei feuchter Luft zu vernachlässigen ist. Es wurde das Entstehen von Eiskristallen vorausgesetzt und die mittlere Oberflächenenergie dieser Kristalle so gewählt, daß der Kondensationsbeginn ungefähr richtig herauskam. Die mittlere Oberflächenenergie liegt dabei durchaus in dem zu erwartenden Bereich. Von einem weiteren Ausbau der Theorie wurde aber hier vorläufig Abstand genommen, da man bei einigem Arbeitsaufwand durch entsprechende Wahl des unbekannten Tropfenwachstumsgesetzes und der unbekannten mittleren Oberflächenenergie von Eiskristallen ohne weiteres Übereinstimmung von Theorie und Experiment erzielen kann. Für die Prüfung der Theorie sind diese Versuche also wenig geeignet. Sie sind nach der Prüfung der Theorie durch Experimente an Dampfdüsen eher dadurch wertvoll, daß man durch sie vielleicht das Wachstumsgesetz kleiner Tropfen und deren mittlere Oberflächenenergie finden könnte. Allerdings wäre dann zuerst wichtig festzustellen, ob man es mit Wasser- oder Eisbildung zu tun hat. Ferner kann mit Hilfe dieser Experimente die Gesetzmäßigkeit des Kondensationsbeginnes bei von feuchter Luft durchströmten Lavaldüsen gefunden werden, worüber an anderer Stelle berichtet wird [11]. Die strichpunktierten Linien geben die theoretischen Werte von $\frac{\varrho}{\varrho_0}$ und $\frac{p}{p_0}$, die man erhält, wenn man Sättigung in jedem Augenblick voraussetzt. Sie wurden für eine Kesseltemperatur von 20° C und einer relativen Feuchtigkeit von $\varphi_0 = 1{,}00$ errechnet. Man sieht, daß diese Kurven mit den Experimenten gar nichts gemeinsam haben, die Dichtekurve liegt sogar auf der falschen Seite. Bis zur engsten Stelle decken sich die Versuchswerte der drei Versuche mit feuchter Luft und des Versuches mit trockener Luft innerhalb der Meßgenauigkeit vollkommen.

Herr Professor Prandtl hat mir die Anregung und zahlreiche wertvolle Ratschläge zu dieser Arbeit gegeben, die Deutsche Forschungsgemeinschaft ermöglichte es mir, mit der Durchführung der Arbeit zu beginnen. Sowohl Herrn Professor Prandtl als auch der Deutschen Forschungsgemeinschaft bin ich daher zu aufrichtigstem Dank verpflichtet.

An dieser Stelle möchte ich auch Herrn Dr. Hellwig danken, der mich unermüdlich bei langwierigen Rechnungen unterstützte.

Schrifttum-Verzeichnis.

[1] J. I. Yellott: Supersaturated steam. Engineering Bd. 137 (1934), S. 303.

[2] A. M. Binnie und M. W. Woods: The pressure distribution in a convergent-divergent steam nozzle. Proc. Instn. mech. Engrs., Bd. 138 (1938), S. 229.

[3] A. Stodola: Dampf- und Gasturbinen. 6. Aufl. Berlin (1924), S. 96.

[4] J. I. Yellott und C. K. Holland: The condensation of flowing steam: Condensation in diverging nozzles. Engineering Bd. 143 (1937), S. 647.

[5] Ergebnisse der Aerodyn. Vers. Anstalt zu Göttingen. II. Lieferung (1923), S. 28.

[6] G. Jäger: Die kinetische Theorie der Gase und Flüssigkeiten. Handb. d. Physik Bd. IX, Berlin (1926), S. 439.

[7] Kl. Oswatitsch: Die Dispersion und Absorption des Schalles in Wolken. Phys. Z. Bd. 42 (1941), Heft 21/22, S. 365 bis 378.

[8] W. Prüger: Die Verdampfungsgeschwindigkeit der Flüssigkeiten. Z. Phys. Bd. 115 (1940), S. 202.

[9] N. Frössling: Über die Verdunstung fallender Tropfen. Gerlands Beitr. Geophys. Bd. 52 (1938), S. 170.

[10] R. Becker und W. Döring: Ann. Phys. 5. Folge Bd. 24 (1935), S. 719.

[11] Kl. Oswatitsch: Bericht in Vorbereitung (1941). 326

Über den Einfluß der Düse auf Widerstandsmessungen im Freistrahl II.

Von *D. Küchemann* und *F. Vandrey* in Göttingen.

Die Untersuchungen einer früheren Arbeit desselben Titels (Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 17 bis 31) werden fortgesetzt und ergänzt, unter besonderer Berücksichtigung des kurzen Widerstandskörpers (dargestellt durch einen Dipol). Die durch die Kanalgrenzen hervorgerufenen Zusatzgeschwindigkeiten werden berechnet und diejenige Lage des Körpers bestimmt, in welcher die Zusatzgeschwindigkeit am Orte des Körpers verschwindet, in welcher sich also die Einflüsse von Düse und Freistrahl gerade aufheben. Die Rechnungen sind für ebene und für rotationssymmetrische Strömung durchgeführt. An die Behandlung der ebenen Aufgabe werden einige allgemeine Betrachtungen über die bei Randwertaufgaben mit gemischten Grenzen auftretenden mathematischen Fragen angeschlossen, die qualitativ auch für die räumliche Aufgabe gelten.

I. Aufgabenstellung.

In einer ersten Mitteilung[1]) wurden Halbkörper und Quellsenkenkörper im Freistrahl von kreisförmigem Querschnitt untersucht, mit dem Ergebnis, daß die Düse praktisch keinen Einfluß mehr auf die Zusatzgeschwindigkeit am Orte des Widerstandskörpers hat, wenn der Körper etwa einen Kanalradius oder mehr von der Düse entfernt ist. Wenn das Problem nun nochmals aufgegriffen wird, so hat das vor allem zwei Gründe:

Zunächst sollte die Reihe der Beispiele dahin vervollständigt werden, daß auch kurze Körper (dargestellt durch einen Dipol) behandelt werden, da für diese ein deutlicherer Einfluß der Düse zu erwarten ist. — Weiterhin sollte genauer festgestellt werden, wie die Düse wirkt, wenn sich der Körper sehr nahe an der Düse befindet.

Schließlich sollten einige grundsätzliche Fragen an Hand einer Rechnung für die entsprechende ebene Strömung aufgeklärt werden.

Im ersten Teil wird die ebene Strömung untersucht, welche sich mit Hilfe der konformen Abbildung berechnen läßt, und im zweiten Teil wird die rotationssymmetrische Strömung mit Hilfe von Singularitätenbelegungen auf den Kanalgrenzen behandelt. In beiden Fällen wird dabei noch die Voraussetzung gemacht, daß sich die freie Strahlgrenze nicht deformiert. Wieweit diese Annahme berechtigt ist, müßte eine besondere Untersuchung zeigen. Jedoch ist anzunehmen, daß bei den kleinen Entfernungen zwischen Düse und Körper, wie sie hier untersucht werden, der mögliche Einfluß der Strahldeformation nur klein sein wird, so daß der Einfluß der Düse, auf den es uns hier ankommt, doch im wesentlichen richtig erfaßt wird.

II. Die ebene Strömung.

Für den Fall einer ebenen Strömung läßt sich nach der Methode der konformen Abbildung eine verhältnismäßig einfache Lösung der vorliegenden Aufgabe in geschlossener Form angeben. Die praktische Bedeutung des ebenen Falles ist zwar nur gering, da seine Voraussetzungen meist nicht erfüllt sind, dafür gestattet aber seine Lösung einen Einblick auch in die mathematischen Fragen, die bei der räumlichen Aufgabe auftreten.

Wir betrachten die folgende Anordnung (Bild 1a): Die beiden Halbgeraden $y = \pm \frac{i}{2} D$, $x < 0$ der z-Ebene bilden die festen Wände des Kanals, die Halbgeraden $y = \pm \frac{i}{2} D$, $x > 0$ die Grenzen des Freistrahles. Die Kanalbreite ist dann gleich D, die Geschwindigkeit der ungestörten Strömung im Kanal sei $+U$. Als Störung nehmen wir einen Dipol in der Kanalachse bei $x = a$ mit dem Moment

$$M = \frac{\pi d^2}{2} U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

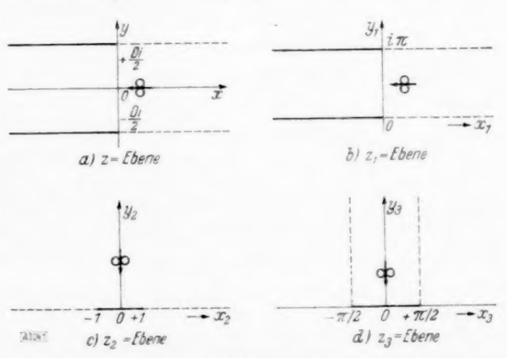


Bild 1. Aufbau der Abbildungsfunktion zur Lösung der ebenen Aufgabe.

Dieser würde in einer ungestörten Parallelströmung von der Geschwindigkeit U einen

[1]) D. Küchemann u. F. Vandrey: Über den Einfluß der Düse (oder des Auffangtrichters) auf Widerstandsmessungen im Freistrahl. Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 17 bis 31.

Kreis vom Durchmesser d als Grenzstromlinie liefern: wenn wir $d \ll D$ voraussetzen, so ersetzt der die Störung darstellende Dipol einen Körper, der von einem Kreiszylinder mit dem Durchmesser d nur wenig abweicht.

Zu der Dipolströmung soll nun eine Zusatzströmung bestimmt werden, so daß für die durch Überlagerung beider entstehende Strömung die festen Wände Stromlinien und die Freistrahlgrenzen Potentiallinien werden. Die erste dieser Forderungen ist genau, die zweite dagegen eine Näherung. Eigentlich wäre eine neue Freistrahlgrenze so zu bestimmen, daß auf ihr die Geschwindigkeit (und damit der Druck) der Gesamtströmung konstant ist. Die Näherung ist zulässig, solange die Geschwindigkeit der Zusatzströmung auf der alten Freistrahlgrenze klein bleibt gegen die Hauptgeschwindigkeit U.

Zur Bestimmung der Zusatzströmung bilden wir den Kanal konform auf ein Gebiet ab, bei dem sich die Randbedingungen durch Spiegelungen erfüllen lassen. Hierzu setzen wir zuerst

$$z_1 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2z}{D} + i\right) \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Dem Kanal in der z-Ebene entspricht dann in der z_1-Ebene ein Streifen zwischen den Geraden $y_1 = 0$ und $y_1 = \pi$ (Bild 1b). Diesen Streifen bilden wir weiter so auf die obere Hälfte einer z_2-Ebene ab, daß die untere feste Wand in die Strecke $0 < x_2 < 1$, die obere in die Strecke $-1 < x_2 < 0$, die untere Freistrahlgrenze in die Halbgerade $1 < x_2 < \infty$ und die obere in die Halbgerade $-\infty < x_2 < 1$ übergeht (Bild 1c). Dies leistet die Abbildung

$$z_2 = e^{z_1} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Schließlich bilden wir die obere Hälfte der z_2-Ebene noch mittels der Funktion

$$z_3 = \text{arc}\sin z_2 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

auf den Halbstreifen $|x_3| \leq \frac{\pi}{2}$, $y_3 \geq 0$ einer z_3-Ebene ab (Bild 1d) [2]). Faßt man diese Abbildungen zusammen, so erhält man den Zusammenhang zwischen der z-Ebene und der z_3-Ebene in der Form

$$z_3 = \text{arc}\sin(i\, e^{\pi z/D}) \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Der Dipol, der in der z-Ebene bei $z = a$ lag, liegt in der z_3-Ebene bei

$$a_3 = i\, \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, e^{\pi a/D} \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Die Strecke $y_3 = 0$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ soll Stromlinie, die beiden Halbgeraden $x_3 = \pm\frac{\pi}{2}$, $y_3 > 0$ sollen Potentiallinien werden.

Diese Randbedingungen lassen sich nun leicht durch Spiegelung erfüllen (Bild 2). Hierzu spiegeln wir zunächst den Dipol fortgesetzt unter jeweiliger Umkehr seines Vorzeichens an den Geraden $x_3 = \pm\frac{\pi}{2}$ und erhalten so eine Dipolreihe längs der Geraden $y_3 = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, e^{\pi a/D}$ in den Punkten $x_3 = 0$, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, ... (nach unten gerichtete Dipole) und $x_3 = \pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$, ... (nach oben gerichtete Dipole). Die ganze Dipolreihe spiegeln wir nochmals unter Umkehr ihrer Richtung an der reellen Achse $y_3 = 0$ und erhalten eine zweite Reihe von Dipolen auf der Geraden $y_3 = -\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, e^{\pi a/D}$.

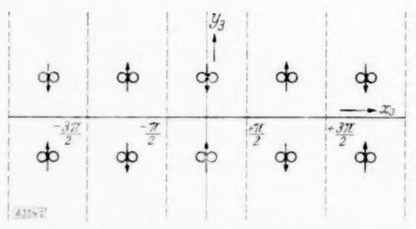


Bild 2. Lösung der ebenen Aufgabe durch Spiegelungen in der z_3-Ebene.

Für beide Reihen läßt sich das komplexe Potential in geschlossener Form angeben. Man hat für die obere Reihe

$$\Phi_1 = k/\sin(z_3 - \text{arc}\sin i\, e^{\pi a/D}) \quad \ldots\ldots \quad (7\text{a})$$

und für die untere

$$\Phi_2 = -k/\sin(z_3 + \text{arc}\sin i\, e^{\pi a/D}) \quad \ldots\ldots \quad (7\text{b}),$$

wo k so zu bestimmen ist, daß sich in der z-Ebene für den Dipol die richtige Stärke ergibt. Insgesamt erhält man in der z-Ebene

$$\left.\begin{aligned} \Phi = k\,[1/\sin(\text{arc}\sin i\, e^{\pi z/D} - \text{arc}\sin i\, e^{\pi a/D}) \\ - 1/\sin(\text{arc}\sin i\, e^{\pi z/D} + \text{arc}\sin i\, e^{\pi a/D})] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \Phi = k\,[1/(e^{\pi z/D}\sqrt{1 + e^{2\pi a/D}} - e^{\pi a/D}\sqrt{1 + e^{2\pi z/D}}) \\ - 1/(e^{\pi z/D}\sqrt{1 + e^{2\pi a/D}} + e^{\pi a/D}\sqrt{1 + e^{2\pi z/D}})] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9).$$

[2]) Statt dessen könnte man auch die längs der Strecke $-1 \leq x_2 \leq +1$ aufgeschnittene z_2-Ebene auf das Äußere des Einheitskreises einer z_3-Ebene abbilden und die Randbedingungen durch Spiegelung an diesem Kreise befriedigen.

Die Konstante k erhält man dabei durch Entwicklung von Φ für $z \approx a$ und Vergleich mit (1). Es wird

$$k = \frac{\pi d^2 U}{4 D \sqrt{1 + e^{-\pi a/D}}} \qquad (10).$$

Aus dem Potential erhalten wir die komplexe Geschwindigkeit

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Phi}{dz} &= U \frac{d^2}{D^2} \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\sqrt{1+e^{2\pi a/D}}\sqrt{1+e^{2\pi z/D}}} \\ &\cdot \left[\frac{\sqrt{1+e^{-2\pi a/D}}\sqrt{1+e^{-2\pi z/D}}+1}{(\sqrt{1+e^{-2\pi a/D}}+\sqrt{1+e^{-2\pi z/D}})^2} - \frac{\sqrt{1+e^{-2\pi a/D}}\sqrt{1+e^{-2\pi z/D}}-1}{(\sqrt{1+e^{-2\pi a/D}}-\sqrt{1+e^{-2\pi z/D}})^2} \right] \end{aligned} \right\} \qquad (11).$$

Das durch (9) gegebene Potential erfüllt die Bedingung, daß die festen Wände des Kanals Stromlinien und die Freistrahlgrenzen Potentiallinien sind. Trotzdem kann es noch nicht als endgültige Lösung der Aufgabe angesehen werden, denn die Forderung konstanten Potentials auf der Freistrahlgrenze ist nur dann eine Näherung für die Forderung konstanten Druckes, wenn die Normalgeschwindigkeiten klein sind gegenüber der Geschwindigkeit der Parallelströmung. Dies ist aber in der Nähe der Düsenmündung ($2z/D = \pm i$) auch für kleine d/D nicht der Fall, denn eine Entwicklung der Geschwindigkeit (11) nach Potenzen von

$$\zeta = (2z/D - i)\pi \qquad (12)$$

ergibt

$$\frac{d\Phi}{dz} \approx \frac{\pi^2 i}{2} \frac{U d^2}{D^2} \frac{e^{-\pi a/D}}{\sqrt{1+e^{-2\pi a/D}}} \zeta^{-\frac{1}{2}} \qquad (13).$$

Die Geschwindigkeit geht dort also wie $\zeta^{-\frac{1}{2}}$ gegen Unendlich. Es gibt nun Aufgaben mit gemischten Grenzen, bei denen es grundsätzlich unvermeidbar ist, daß die Geschwindigkeit an den Punkten unendlich wird, in denen die Randbedingung wechselt[3]). Ein Beispiel hierfür bietet die Frage nach der Korrektur des Anstellwinkels eines Flügels in einem teilweise geschlossenen Kanal. Physikalisch würde dieses Unendlichwerden der Geschwindigkeit eine starke Verformung des Strahlrandes an den Enden der freien Grenzen bedeuten, die in Wirklichkeit aber gar nicht eintritt. In dem hier vorliegenden Falle läßt sich nun auch theoretisch eine endliche Geschwindigkeit auf der ganzen Grenze erreichen, wenn man dem Potential Φ noch ein weiteres Potential hinzufügt, das wir als Düsenpotential Φ_D bezeichnen wollen und das folgende Eigenschaften besitzt:

1. Φ_D hat die festen Wände als Stromlinien und die Freistrahlgrenzen als Potentiallinien.
2. $\frac{d\Phi_D}{dz} \sim \left(\frac{2z}{D} \pm i\right)^{-\frac{1}{2}}$ für $2z/D \approx \pm i$.
3. $\frac{d\Phi_D}{dz}$ ist sonst im Kanal und im Freistrahl einschließlich der Grenzen endlich.

Dies Potential entspricht einer Strömung, die senkrecht durch die Freistrahlgrenze eintritt und dabei die Düsenmündung in entgegengesetzter Richtung wie die vom Potential Φ herrührende Strömung umfließt. Weiter innen im Kanal geht die von Φ_D herrührende Strömung dann in eine der Anströmgeschwindigkeit U entgegengerichtete Parallelströmung über. Physikalisch kann man die Düsenströmung dahin deuten, daß die Düse durch den Körper zum Teil versperrt wird und deshalb der Druck im Kanalinnern höher und die Geschwindigkeit dort geringer wird als ohne den Körper.

Aus der Existenz des Potentials Φ_D ergibt sich, daß die gestellte Aufgabe — im ebenen wie im räumlichen Falle — mathematisch nicht eindeutig lösbar ist, da das Potential $\Phi + \lambda \Phi_D$ bei beliebigem λ die zunächst gestellten Bedingungen erfüllt. Unter allen diesen Lösungen gibt es jedoch eine, für welche die Geschwindigkeit auch an der Düsenmündung noch endlich bleibt. Wenn wir nun endliche Geschwindigkeit an der Düsenmündung zusätzlich fordern und so diese Lösung vor den übrigen auszeichnen, so stützen wir uns hierbei auf das von Prandtl[4]) in die Hydrodynamik eingeführte Axiom, nach dem von mehreren mathematisch möglichen Lösungen einer Potentialaufgabe diejenige das beste Bild von den Verhältnissen in wirklichen Flüssigkeitsströmungen gibt, bei der unendliche Geschwindigkeiten möglichst weitgehend vermieden sind.

Um nun für Φ_D einen analytischen Ausdruck zu finden, gehen wir davon aus, daß es weit im Kanal einer Parallelströmung entspricht. Wir erhalten daher nach Abbildung in die z_3-Ebene die Strömung einer Senke im Nullpunkt. Um die Randbedingungen des senkrechten Durchströmens durch die Freistrahlgrenzen zu erfüllen, müssen wir diese Senke fortgesetzt

[3]) Ein Beweis dieser Tatsache wird im Anhang der Arbeit gegeben.

[4]) L. Prandtl u. A. Betz: Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik. Göttingen 1927, S. 15.

unter Umkehr ihres Vorzeichens an den Geraden $x_3 = \pm \frac{\pi}{2}$ spiegeln. Wir erhalten so eine Reihe von Senken in den Punkten $x_2 = \pm 2 n \pi$ und von Quellen in den Punkten $x_3 = \pm (2n+1)\pi$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, deren Potential sich leicht in geschlossener Form angeben läßt. Es wird

$$\Phi_D = \lambda \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} z_3 \qquad (14)$$

oder in der z-Ebene

$$\Phi_D = \lambda \ln \frac{i\, e^{\pi z/D}}{1 + \sqrt{1 + e^{2\pi z/D}}} \qquad (15)$$

mit

$$\frac{d\Phi_D}{dz} = \frac{\lambda \pi}{D}\left(1 + e^{2\pi z/D}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (16).$$

Zur Bestimmung von λ entwickeln wir (16) in der Nähe der Düsenmündung

$$\frac{d\Phi_D}{dz} \approx -\frac{i \lambda \pi}{D} \zeta^{-\frac{1}{2}} \qquad (17).$$

Da das Glied mit $\zeta^{-\frac{1}{2}}$ in der gesamten Zusatzgeschwindigkeit fehlen soll, erhalten wir durch Vergleich mit (13)

$$\lambda = -\frac{\pi}{2} \frac{U d^2}{D^2} e^{-\pi a/D}\left(1 + e^{-2\pi a/D}\right)^{-3/2} \qquad (18).$$

Insgesamt erhalten wir also für die Zusatzgeschwindigkeit einschließlich der Dipolströmung

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(\Phi + \Phi_D)}{dz} &= U \frac{d^2}{D^2} \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2\pi a/D}}\sqrt{1 + e^{2\pi z/D}}} \\ &\cdot \left[\frac{\sqrt{1+e^{-2\pi a/D}}\sqrt{1+e^{-2\pi z/D}}+1}{\left(\sqrt{1+e^{-2\pi a/D}}+\sqrt{1+e^{-2\pi z/D}}\right)^2} - \frac{\sqrt{1+e^{-2\pi a/D}}\sqrt{1+e^{-2\pi z/D}}-1}{\left(\sqrt{1+e^{-2\pi a/D}}-\sqrt{1+e^{-2\pi z/D}}\right)^2} - \frac{2}{1+e^{-2\pi a/D}}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (19).$$

Wir berechnen nun zunächst die Zusatzgeschwindigkeit weit im Kanal $(z = -\infty)$, die von der Versperrung der Düse herrührt.

$$u(-\infty) = \lim_{z \to -\infty} \frac{d(\Phi + \Phi_D)}{dz} \qquad (20),$$

$$u(-\infty) = -\frac{U d^2}{D^2} \frac{\pi^2}{2} e^{-\pi a/D}\left(1 + e^{-2\pi a/D}\right)^{-3/2} \qquad (21).$$

In Bild 3 ist die dimensionslose Zusatzgeschwindigkeit $(u(-\infty)/U)(D^2/d^2)$ in Abhängigkeit von der Lage $2a/D$ des störenden Dipols aufgetragen. Sie ist erwartungsgemäß dann am größten, wenn der Dipol ungefähr in der Düsenmündung liegt. Weiter berechnen wir die Zusatzgeschwindigkeit am Orte des Dipols $z = a$ (ohne den Einfluß des Dipols selbst).

$$u(a) = \lim_{z \to a}\left(\frac{d(\Phi + \Phi_D)}{dz} + \frac{d^2 U}{4} \frac{1}{(z-a)^2}\right) \qquad (22),$$

$$u(a) = \frac{U d^2}{D^2} \frac{\pi^2}{24} \frac{2 e^{-4\pi a/D} - 8 e^{-2\pi a/D} - 1}{\left(1 + e^{-2\pi a/D}\right)^2} \qquad (23).$$

Für $a = -\infty$ erhalten wir als Grenzwert die Zusatzgeschwindigkeit am Orte eines Dipols, der sich in einem geschlossenen Kanal befindet.

$$u(a) = \frac{U d^2}{D^2} \frac{\pi^2}{12} \quad (a = -\infty) \qquad (24).$$

Für $a = +\infty$ erhalten wir entsprechend die Geschwindigkeitskorrektur für einen Dipol im Freistrahl

$$u(a) = -\frac{U d^2}{D^2} \frac{\pi^2}{24} \quad (a = +\infty) \qquad (25).$$

Zwischen diesen beiden Grenzlagen gibt es eine Stelle a, für welche die Geschwindigkeitskorrektur $u(a)$ gleich Null wird, sie ergibt sich nach (23) aus der Gleichung

$$2 e^{-4\pi a/D} - 8 e^{-2\pi a/D} - 1 = 0 \qquad (26)$$

zu

$$\frac{2a}{D} = -\frac{1}{\pi} \ln\left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = -0{,}451 \qquad (27).$$

Die Stelle verschwindender Korrektur liegt also noch innerhalb der Düse. In Bild 4 ist die dimensionslose Zusatzgeschwindigkeit am Orte des Dipols $(u(a)/U)(D^2/d^2)$ in Abhängigkeit von der Lage des Dipols $2a/D$ aufgetragen. An dem Bilde fällt auf, daß der Übergang von der Korrektur für den festen Kanal zu der für den Freistrahl nicht monoton erfolgt, sondern

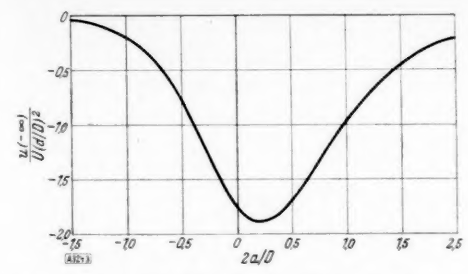


Bild 3. Ebene Strömung. Zusatzgeschwindigkeit weit im Innern des festen Kanalteiles in Abhängigkeit von der Lage des Dipols.

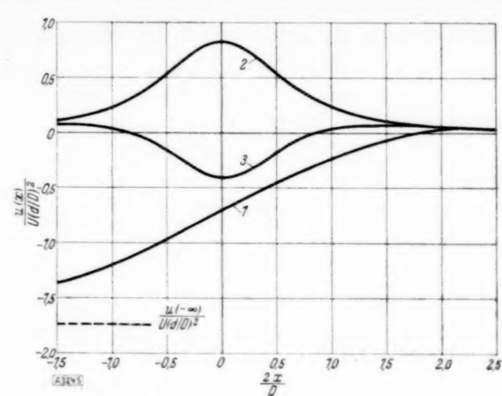


Bild 5. Ebene Strömung. Zusatzgeschwindigkeit in der Kanalachse, wenn der Dipol in der Düsenmündung liegt (1). Zum Vergleich sind die Zusatzgeschwindigkeiten für einen Dipol in einem geschlossenen Kanal (2) und in einem Freistrahl (3) eingezeichnet.

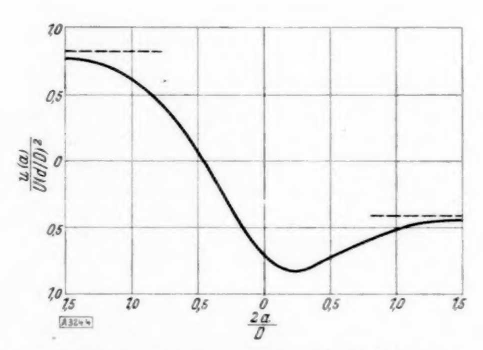


Bild 4. Ebene Strömung. Zusatzgeschwindigkeit am Orte des Dipols in Abhängigkeit von seiner Lage.

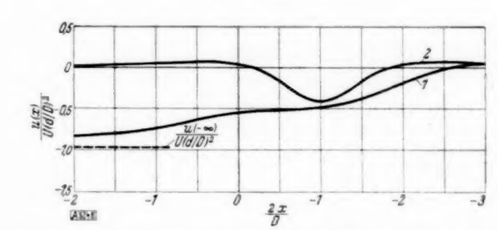


Bild 6. Ebene Strömung. Zusatzgeschwindigkeit in der Kanalachse, wenn der Dipol einen Düsenhalbmesser vor der Düsenmündung liegt (1). Zum Vergleich ist die Zusatzgeschwindigkeit für einen Dipol im Freistrahl (2) eingezeichnet.

daß der Wert der Freistrahlkorrektur zunächst in der Nähe der Düse beträchtlich überschritten wird und dann der Betrag der Korrektur wieder gegen den für den reinen Freistrahl abnimmt. Dies Verhalten kommt durch den ziemlich starken Einfluß des Düsenpotentials in der Nähe der Düse zustande.

In Bild 5 ist noch die Geschwindigkeitskorrektur längs der Achse (ohne den Einfluß des Dipols selbst) für den Fall gezeichnet, daß der Dipol in der Düsenmündung liegt ($a = 0$) (Kurve 1). Zum Vergleich sind die entsprechenden Kurven für den festen Kanal (Kurve 2) und den Freistrahl (Kurve 3) mit eingetragen. Der Verlauf ist in diesem Falle erheblich anders als für den Freistrahl oder den festen Kanal, auch sind die auftretenden Zusatzgeschwindigkeiten wesentlich größer als in diesen beiden Fällen. Der Grund hierfür liegt wiederum hauptsächlich im Einfluß des Düsenpotentials. Geht man mit dem Körper vor die Düse, so klingt dieser Einfluß ziemlich rasch ab. Als Beispiel einer solchen Lage ist in Bild 6 die Geschwindigkeitskorrektur in der Achse für eine Entfernung des Dipols von der Düse gleich dem halben Düsendurchmesser (Kurve 1) mit der Korrektur des reinen Freistrahles (Kurve 3) verglichen.

Bei den vorstehenden Überlegungen ist als Bezugsgeschwindigkeit stets die Geschwindigkeit U der ungestörten Parallelströmung genommen worden. Diese herrscht in der gestörten Strömung auf dem Rande und weit von der Düse auch im Innern des Freistrahles, nicht aber weit im Innern des festen Kanalteiles. Man mißt nun die Strahlgeschwindigkeit zumeist durch Überdruck Δp in der Düsenvorkammer des Kanals nach der Beziehung

$$\frac{\varrho}{2} U^2 = \frac{\Delta p}{1 - (F_1/F_2)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (28),$$

wo F_1 der Düsenquerschnitt, F_2 der Querschnitt der Düsenvorkammer ist. Im Falle ebener Strömung kann man F_1/F_2 durch das Verhältnis der Durchmesser D_1/D_2 ersetzen. Nun hat man in der Düse die mittlere Geschwindigkeit

$$U_1 = U - u(-\infty) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (29),$$

in der Düsenvorkammer ist daher die Geschwindigkeit aus Kontinuitätsgründen

$$U_2 = D_1 (U - u(-\infty)) / D_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (30).$$

Der Druck in der Düsenvorkammer ist dann

$$p_2 = -\frac{\varrho}{2}\frac{D_1^2}{D_2^2}(U - u(-\infty))^2 + p_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (31\,a).$$

Der Druck im Freistrahl ist

$$p_1 = -\frac{\varrho}{2}U^2 + p_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (31\,b).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt für die Geschwindigkeit U

$$\frac{\varrho}{2}U^2 = \frac{p_2 - p_1}{1 - [D_1(1 - u(-\infty)/U)/D_2]^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (32).$$

Dies Ergebnis läßt sich so aussprechen, daß wegen der Versperrung der Düse durch den Körper der Endquerschnitt des Freistrahles kleiner wird als der Düsenquerschnitt. Der Betrag dieser Verkleinerung kann aus den in Bild 3 gegebenen Werten für $u(-\infty)$ leicht berechnet werden. Da bei der Auswertung von Messungen ein Staudruck zugrunde gelegt wird, der einfach nach (28) berechnet ist, so erhält man Beiwerte, die im Verhältnis

$$\frac{1 - [D_1(1 - u(-\infty)/U)/D_2]^2}{1 - (D_1/D_2)^2} \approx 1 + 2\frac{D_1^2}{D_2^2}\frac{u(-\infty)}{U}$$

zu klein sind.

III. Die rotationssymmetrische Strömung.

Den Untersuchungen dieses Abschnittes wird eine kreisförmige Düse[5]) mit anschließendem zylindrischen Freistrahl von Kreisquerschnitt zugrunde gelegt. Wir benutzen ein Koordinatensystem mit dem Nullpunkt auf der Symmetrieachse in der Düsenmündung und bezeichnen mit x die axiale, mit r die radiale Richtung. Der Durchmesser des Kanals sei D, die ungestörte Anströmgeschwindigkeit sei U. Als Störung wählen wir einen Dipol auf der Achse im Abstand $x = a$ von der Düsenmündung mit dem Moment

$$M = \frac{\pi}{4} D^3 U (d/D)^3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (33),$$

welcher in einer ungestörten Parallelströmung eine Kugel mit dem Durchmesser d als Grenzstromlinie liefern würde.

Die Rechnung ist nach der Methode der in Fußnote 1 angegebenen Arbeit durchgeführt, so daß darauf nicht näher eingegangen werden soll. Sie beruht auf dem Singularitätenverfahren, wonach zur Erfüllung der durch den Dipol gestörten Randbedingungen die feste Wand mit Quellringen und die freien Strahlgrenzen mit Wirbelringen belegt werden. Wir erhalten so eine Integralgleichung für die Dichte μ der Belegung, welche numerisch durch Iteration gelöst werden kann. Die Konvergenz des Iterationsverfahrens machte bei den angegebenen Beispielen gewisse Schwierigkeiten, so daß teilweise bis zur 15. Näherung gerechnet werden mußte. Jedoch ist die Konvergenz als gesichert anzusehen. — Die Rechnung wurde durchgeführt für 3 Lagen des Dipols: $2a/D = 0$; 0,5; 1,0. In Bild 7 sind die Belegungsdichten μ aufgetragen. Für negative x (feste Wand) bedeutet μ die Ergiebigkeit von Quellringen, für positive x (Freistrahl) die Stärke von Wirbelringen. Die Ausgangsnäherung $\mu^{(0)}$ (doppelte Normalgeschwindigkeit des störenden Dipols auf der festen Wand, Tangentialgeschwindigkeit auf den Freistrahlgrenzen) ist zum Vergleich gestrichelt eingetragen.

Bereits in der ersten Mitteilung wurde darauf hingewiesen (S. 26), daß unsere numerische Methode nicht geeignet ist, die Verhältnisse an der Übergangsstelle genau zu erfassen. Ein Unendlichwerden der Geschwindigkeit an dieser Stelle wird bei der Integralgleichungsmethode dadurch vermieden, daß die Belegung an der Kanalmündung nach Null geht. Damit erhalten wir, im Gegensatz zur ebenen Potentialaufgabe des vorigen Abschnittes, wie in der ersten Mitteilung sofort eine eindeutige Lösung, welche im Innern der festen Wände einen Stau hervorruft (entsprechend der Gesamtlösung des vorigen Abschnitts, welche das Düsenpotential mit enthält). Die aus den Singularitätenbelegungen berechneten Zusatzgeschwindigkeiten dürften trotz der Unsicherheit an der Düsenmündung ein gutes Bild von den wirklichen Verhältnissen geben, besonders in der Kanalachse.

Die axialen Zusatzgeschwindigkeiten u am Orte des Dipols sind in Bild 8 aufgetragen. Die Zusatzgeschwindigkeit für eine feste Lage des Dipols in dessen Nachbarschaft zeigt Bild 9. Dabei ist u die Differenz zwischen der wahren durch die Kanalgrenzen veränderten Geschwindigkeit an dem betreffenden Punkt und der Geschwindigkeit U auf dem Strahlrand vermehrt um die vom störenden Körper herrührende Geschwindigkeit. In Bild 8 ist außer-

[5]) Die Form der festen Wand ist aus theoretischen Gründen, welche in der ersten Mitteilung (Fußnote 1) ausführlich dargestellt sind, bis etwa zum 1,5-fachen Kanalradius von der Düsenmündung kreiszylindrisch und erweitert sich dann, um schließlich in eine zur Achse senkrechte Wand überzugehen (Düse 1 der angeführten Arbeit).

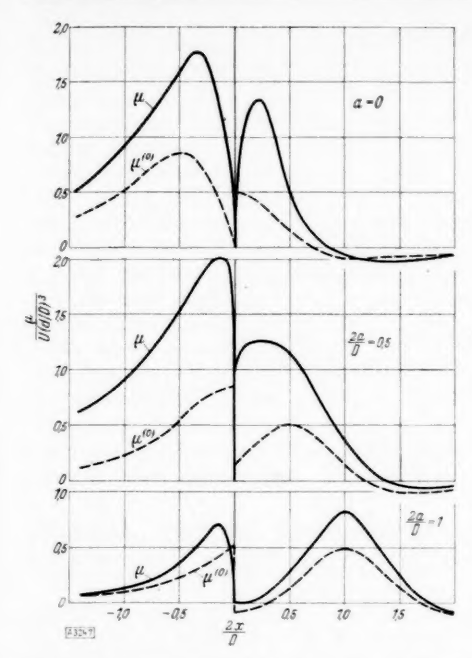


Bild 7. Rotationssymmetrische Strömung. Singularitätenbelegung auf dem Kanalrand für verschiedene Lagen des Dipols zur Düse.

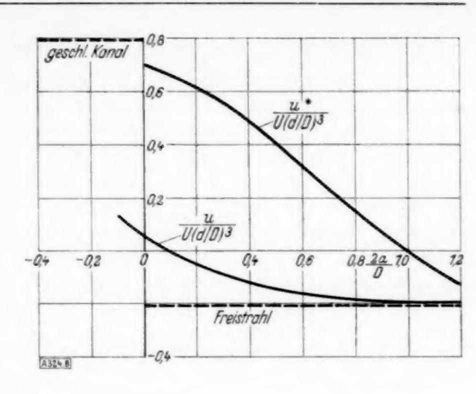
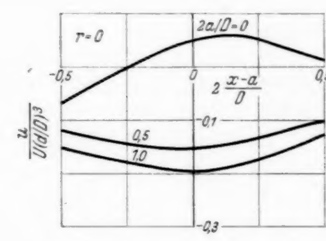


Bild 8 (rechts oben). Rotationssymmetrische Strömung. Zusatzgeschwindigkeiten im Mittelpunkt für die Kugel in verschiedenen Abständen von der Düse.



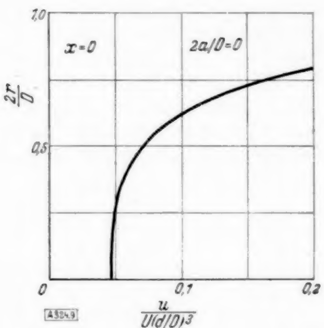


Bild 9 (rechts unten). Rotationssymmetrische Strömung: Oben: Zusatzgeschwindigkeit in der Achse für verschiedene Lagen des Dipols. Unten: Zusatzgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Entfernung von der Achse für die Kugel in der Düsenmündung.

dem noch eine Geschwindigkeit $u^* = u - \bar{u}$ eingetragen, wobei $\bar{u}$ den Mittelwert der Axialkomponente der Zusatzgeschwindigkeit im zylindrischen Teil des geschlossenen Kanals bedeutet[6]). Hat man also den statischen Druck in der Düsenvorkammer gemessen und daraus mittels des Düsenfaktors nach (32) die Geschwindigkeit auf dem Strahlrand bestimmt, so gibt u die Größe der Geschwindigkeitskorrektur an. Aus Bild 8 ersieht man nun die bemerkenswerte Tatsache, daß für u der Einfluß der Düse auf Körper im Freistrahl äußerst gering ist. Noch für solche Körper, welche sich einen Kanalradius von der Düse entfernt befinden, haben wir für u praktisch nur Freistrahleinfluß. Erst bei noch größerer Annäherung an die Düse macht sich deren Wirkung bemerkbar. Die Stelle verschwindender Korrektur liegt etwa $^1/_{10}$ Kanalradius von der Düsenmündung entfernt. Dieses Ergebnis ist in der Hauptsache dadurch bedingt, daß bei Annäherung an die Düse wohl die Quellbelegungen der Düse (Bild 7) stark anwachsen, aber ebenfalls die Wirbelbelegungen des Freistrahls; beide rufen entgegengesetzt gerichtete Zusatzgeschwindigkeiten hervor, so daß im Endergebnis der Düseneinfluß wieder herabgesetzt wird.

Die in Bild 8 eingetragene Zusatzgeschwindigkeit u^* würde Bedeutung erlangen, wenn experimentell direkt die mittlere Geschwindigkeit in der Düsenvorkammer bestimmt würde. In diesem Falle liegt die korrekturfreie Stelle ($u^* = 0$) wesentlich weiter, nämlich einen Kanalradius, von der Düsenmündung entfernt. — Aus Bild 8 kann man ebenfalls $\bar{u} = u - u^*$ entnehmen.

Bild 9 zeigt vor allem, daß sich die Zusatzgeschwindigkeiten außerhalb der Achse für Körper mäßiger Dicke nur wenig von den Werten auf der Kanalachse unterscheiden, so daß es stets genügt, die letzteren allein zu berechnen.

[6]) $\bar{u}$ entspricht $u(-\infty)$ im ebenen Fall und ist stets der Anströmung entgegen gerichtet (< 0).

IV. Zusammenfassung.

Zur Bestimmung der Geschwindigkeitskorrektur in einem Windkanal mit freier Meßstrecke, in welchen sich ein kurzer Widerstandskörper, dargestellt durch einen Dipol, befindet, wird zunächst der ebene Fall als Potentialaufgabe mittels konformer Abbildung behandelt. Es zeigt sich zunächst, daß es eine Lösung gibt, welche zwar die Randbedingungen erfüllt, jedoch an der Übergangsstelle Düse–Freistrahl eine unendlich große Geschwindigkeit liefert. Um dies zu vermeiden, wird eine zweite Lösung überlagert, welche die Düsenmündung ebenfalls mit unendlich großer Geschwindigkeit jedoch in der entgegengesetzten Richtung umströmen läßt, die Randbedingungen erfüllt und im Innern des Kanals singularitätenfrei ist. Einige allgemeine Betrachtungen über die bei Randwertaufgaben mit gemischten Grenzen auftretenden mathematischen Fragen werden angeschlossen, welche qualitativ auch die Vorgänge bei dem entsprechenden räumlichen Problem klären. In einem Anhang wird gezeigt, daß sich bei der Behandlung der Potentialaufgabe, die Anstellwinkelkorrektur in einem Windkanal mit teilweise offener und teilweise geschlossener Meßstrecke zu bestimmen, das Unendlichwerden der Geschwindigkeit an den Übergangsstellen grundsätzlich nicht vermeiden läßt.

Der räumliche Fall wird nach der in der ersten Mitteilung (siehe Fußnote 1) angegebenen Methode behandelt; dabei wird die Integralgleichung für die Singularitätenbelegung des Randes numerisch durch Iteration gelöst.

Bestimmt man die Anströmgeschwindigkeit experimentell aus dem Düsenvorkammerdruck, so muß mit einem etwas veränderten Düsenfaktor gerechnet werden, falls der Widerstandskörper sich sehr nahe an der Düse befindet.

Für einen Körper im Freistrahl ändert sich dabei die Geschwindigkeitskorrektur infolge Düseneinflusses erst dann merklich, wenn er sich näher als einen Kanalradius an der Düsenmündung befindet. Die Stelle verschwindender Korrektur für u liegt etwa $^1/_{10}$ Kanalradius von der Düse entfernt, eine Lage, die bei Widerstandsmessungen praktisch unbequem ist. Jedoch könnte man in manchen Fällen den Freistrahleinfluß durch Annäherung des Körpers an die Düse wenigstens herabsetzen. Weiter ergibt sich, daß sich die Zusatzgeschwindigkeiten außerhalb der Achse für mäßige Dicken nicht erheblich von den in der Kanalachse herrschenden Zusatzgeschwindigkeiten unterscheiden.

Anhang.

Eine Bemerkung zu Randwertaufgaben mit gemischten Grenzen.

In dem in der vorliegenden Arbeit behandelten Falle gelang es, durch Hinzufügen einer im Inneren des betrachteten Gebietes regulären Potentialfunktion zu erreichen, daß die Geschwindigkeit in allen Randpunkten endlich bleibt, auch in solchen, wo die Randbedingung wechselt. Dies ist jedoch nicht bei allen Aufgaben mit gemischten Grenzen möglich, wie im folgenden kurz gezeigt werden soll.

Wir betrachten als einfachstes Beispiel dieser Art die Aufgabe, eine Strömung zu bestimmen, die die Strecke $-1 < x < +1$ als Stromlinie, den übrigen Teil der reellen Achse als Potentiallinie hat. Eine erste Lösung dieser Aufgabe ist offenbar die symmetrische Strömung senkrecht gegen eine Platte, eine zweite die zirkulatorische Strömung um die Platte, die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination dieser beiden. Beide Strömungen haben für sich in den Punkten $x = \pm 1$ unendliche Geschwindigkeit, und zwar ist die Umströmung der Streckenenden bei der ersten symmetrisch, bei der zweiten antisymmetrisch zur y-Achse (Bild 10). Eine passende Linearkombination beider Lösungen kann also wohl in einem der beiden Endpunkte eine unendliche Geschwindigkeit vermeiden, nicht aber in beiden zugleich, da die Umströmungsrichtung immer in einem der beiden Enden gleich, im anderen aber entgegengesetzt ist. Fordert man, wie es bei der Bestimmung der Korrekturen eines teilweise abgedeckten Kanals nötig ist, daß die Potentialwerte auf den beiden Teilen der x-Achse von $-\infty$ bis -1 und von $+1$ bis $+\infty$ gleich sein sollen, so bleibt nur die senkrechte Anströmung der Platte als mögliche Lösung, bei der in beiden Endpunkten unendliche Geschwindigkeiten auftreten. 324

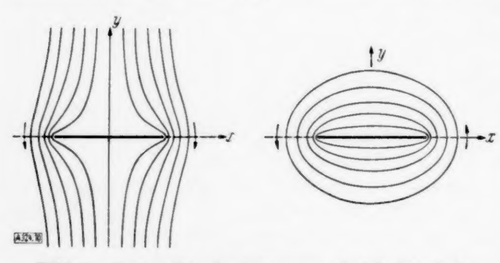


Bild 10. Senkrechte Anströmung und zirkulatorische Umströmung einer ebenen Platte.

Untersuchung über die Grenzschicht einer Flüssigkeit über einer rotierenden Scheibe bei kleiner Winkelgeschwindigkeitsänderung.

Von *Karl-Hans Thiriot* in Friedrichshafen.

(Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Zur Untersuchung der stationären Grenzschichtströmung nach einer kleinen Winkelgeschwindigkeitsänderung wurden die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen aufgestellt und für den vorliegenden Fall integriert. Im Ergebnis sind die Neigungen der sich als logarithmische Spiralen ergebenden Stromlinien verglichen mit den Messungen des Verfassers und Rechnungen von Cochran und Bödewadt.

Wenn eine Luftmasse über der rotierenden Erdoberfläche zunächst in Ruhe ist und nun unter Verminderung ihrer Höhe auseinandergezogen bzw. unter Zunahme ihrer Höhe seitlich zusammengeschoben wird, so nimmt sie dadurch relativ zur Erdoberfläche gleichzeitig eine Rotation an, die nach Beendigung der Umlagerung konstant bleibt. Der erste Fall stellt den Typus eines Hochdruckgebiets (Antizyklons) dar, der letztere denjenigen eines Tiefdruckgebiets (Zyklons). Bei diesen beiden Strömungsvorgängen ist die Verteilung der Bodenwinde, die im ersteren Falle eine Komponente nach außen, im letzteren Fall eine nach innen haben, von besonderem Interesse. Diese Vorgänge sollen nun in folgender Weise idealisiert werden.

Vorhanden sei eine mit einer Scheibe in gemeinsamer gleichförmiger Rotation befindliche volumbeständige Flüssigkeit von der Winkelgeschwindigkeit ω_0. Die Flüssigkeit sei unendlich ausgedehnt und unendlich hoch. Zur Zeit $t=0$ werde die Scheibe plötzlich um die Winkelgeschwindigkeit ω' beschleunigt oder verzögert. Die endgültige Winkelgeschwindigkeit sei ω_1. Vorausgesetzt sei

$$\omega' = \omega_1 - \omega_0 \text{ klein gegen } \omega_0 .$$

Es soll nun die stationäre Strömung nach der Winkelgeschwindigkeitsänderung untersucht werden, wobei das Hauptinteresse sich auf die hier als laminar angenommenen Grenzschichten konzentrieren wird (der meteorologische Vorgang verläuft zwar mit turbulenten Reibungsschichten, die charakteristischen Vorgänge werden aber qualitativ auch bei der laminaren Strömung in die Erscheinung treten).

Wir betrachten die Strömung von dem mit ω_1 rotierenden System aus und benutzen die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten (vgl. etwa Thiriot, [1]*). Der Rotationssymmetrie wegen werden alle Ableitungen nach φ zu Null. Wenden wir noch die Vernachlässigungen der Prandtlschen Grenzschichttheorie [2] an, so erhalten wir folgendes System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

$$\left. \begin{aligned} & v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - 2(\omega_0 + \omega') v_\varphi - (\omega_0 + \omega')^2 r = \\ & -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

$$v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + 2(\omega_0 + \omega') v_r = \nu \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{(Kontinuitätsgleichung)} \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

mit den Randbedingungen

$$\text{für } z = 0 \qquad v_r = 0, \qquad v_\varphi = 0, \qquad v_z = 0,$$

$$\text{für } z = \infty \qquad v_r = 0, \qquad v_\varphi = -\omega' r,$$

$$\text{wobei } \omega' = \omega_1 - \omega_0 \text{ klein gegen } \omega_0 .$$

*) Das Schrifttumsverzeichnis befindet sich am Schluß der Arbeit.

Erste Näherung.

Zur Integration der Differentialgleichungen machen wir den Ansatz

$$v_r = \omega' r f_1(\zeta), \quad v_\varphi = \omega' r f_2(\zeta), \quad v_z = \frac{\omega'}{\sqrt{\frac{\omega'}{\nu}}} f_3(\zeta),$$

wobei $\zeta = z\sqrt{\frac{\omega'}{\nu}}$.

Gehen wir mit diesen Ansätzen in die Differentialgleichungen ein, so erhalten wir aus Gl. (1) die Geschwindigkeitskomponente v_r, aus Gl. (2) die Geschwindigkeitskomponente v_φ und aus der Kontinuitätsgleichung v_z. Berücksichtigen wir noch, daß wegen des klein vorausgesetzten ω' die quadratischen und höheren Glieder von ω' zur Berechnung der ersten Näherung außer acht gelassen werden können, so erhalten wir

$$\nu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = -2\,\omega_0 (v_\varphi + \omega' r) \quad \ldots \ldots \quad (4),$$

$$\nu \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} = 2\,\omega_0 v_r \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Differenzieren wir Gl. (5) zweimal nach z und multiplizieren Gl. (4) mit ν und Gl. (5) mit $2\,\omega_0$ und substituieren, so erhalten wir

$$\nu^2 \frac{\partial^4 v_\varphi}{\partial z^4} = -4\,\omega_0^2 (v_\varphi + \omega' r) \quad \ldots \ldots \quad (6).$$

Diese Gleichung läßt sich integrieren mit Hilfe des Ansatzes

$$v_\varphi = -\omega' r + f(r)\, e^{\lambda z} \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

Wir setzen den Ansatz (7) in die Differentialgleichung (6) ein und erhalten für λ die Gleichung 4. Ordnung

$$\lambda^4 = -\frac{4\,\omega_0^2}{\nu^2}.$$

Diese Gleichung hat 4 Lösungen:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}} + i\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}} + i\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}$$

$$\lambda_3 = \sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}} - i\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}$$

$$\lambda_4 = -\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}} - i\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}.$$

Für die Differentialgleichung (6) erhalten wir demnach die allgemeine Lösung

$$v_\varphi = -\omega' r + f_{\mathrm{I}}\, e^{\lambda_1 z} + f_{\mathrm{II}}\, e^{\lambda_2 z} + f_{\mathrm{III}}\, e^{\lambda_3 z} + f_{\mathrm{IV}}\, e^{\lambda_4 z}.$$

Zur Befriedigung der Randbedingungen muß

für $z = \infty$; $f_{\mathrm{I}} = f_{\mathrm{III}} = 0$

für $z = 0$; $f_{\mathrm{II}} + f_{\mathrm{IV}} = \omega' r$ sein.

Führen wir die nunmehr erhaltene speziellere Lösung in Gl. (4) ein, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = -2\,\omega_0 \left(f_{\mathrm{II}}(r)\, e^{\lambda_2 z} + f_{\mathrm{IV}}(r)\, e^{\lambda_4 z} \right) \quad \ldots \ldots \quad (4\,\mathrm{a}).$$

Für diese Differentialgleichung erhält man die Lösung

$$v_r = -\frac{2\,\omega_0}{\nu}\left(f_{\mathrm{II}}\cdot\frac{1}{\lambda_2^{\,2}}\,e^{\lambda_2 z} + f_{\mathrm{IV}}\cdot\frac{1}{\lambda_4^{\,2}}\cdot e^{\lambda_4 z}\right) + c_1(r)\,z + c_2(r),$$

wo c_1 und c_2 die noch von r abhängigen Integrationskonstanten sind.

Auf Grund der Randbedingungen werden aber diese zu Null. Außerdem wird deshalb

$$\frac{f_{\mathrm{II}}}{\lambda_2^{\,2}} + \frac{f_{\mathrm{IV}}}{\lambda_4^{\,2}} = 0,$$

und wenn man die erhaltenen Werte für $\lambda_2^{\,2}$ und $\lambda_4^{\,2}$ einsetzt, bekommt man

$$\frac{2\,i\,\frac{\omega_0}{\nu}\left(f_{\mathrm{II}} - f_{\mathrm{IV}}\right)}{4\,\frac{\omega_0}{\nu}} = 0.$$

Daraus folgt:

$$f_{\mathrm{II}} = f_{\mathrm{IV}},$$

also

$$f_{\mathrm{II}} = f_{\mathrm{IV}} = \frac{\omega' r}{2}.$$

Damit wird

$$v_r = \omega' r\cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z}\sin\left(\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z\right)$$

$$v_\varphi = -\,\omega' r + \omega' r\,e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z}\cos\left(\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z\right)$$

und aus der Kontinuitätsgleichung

$$v_z = -\frac{\omega'}{\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}} + \frac{\omega'}{\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}}\,e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z\right) + \sin\left(\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z\right)\right].$$

Zweite Näherung.

Um die Differentialgleichungen (1), (2) und (3) genauer integrieren zu können, wenden wir ein Iterationsverfahren an, indem wir mit den Lösungen der 1. Näherung in die Differentialgleichungen (1), (2) und (3) eingehen. Wir erhalten dann folgende Differentialgleichungen:

$$\omega'^2 r\,e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z}\left(\sin\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z - \cos\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z\right) = \nu\,\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + 2\,\omega_0\,(v_\varphi + \omega' r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\,\mathrm{a}),$$

$$\omega'^2 r\,e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z}\left(\cos\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z + \sin\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z - e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z}\right) = \nu\,\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - 2\,\omega_0\,v_r \quad . \quad . \quad . \quad (1\,\mathrm{b}).$$

Durch Elimination wird dann

$$\nu^2\,\frac{\partial^4 v_\varphi}{\partial z^4} + 4\,\omega_0^{\,2}\,(v_\varphi + \omega' r) = 4\,\omega'^2 r\,\omega_0\,e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z}\left(\sin\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z - \cos\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z - e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z}\right).$$

Die Differentialgleichung hat als partikuläres Integral

$$v_\varphi = -\,\omega' r - \frac{\omega'^2 r}{2\sqrt{\nu\,\omega_0}}\cdot z\cos\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z\,e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z} - \frac{\omega'^2 r}{5\,\omega_0}\,e^{-2\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z}$$

und die Differentialgleichung (1a)

$$v_r = -\frac{\omega'^2 r}{2\sqrt{\nu\,\omega_0}}\,z\,e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z}\sin\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z + \frac{\omega'^2 r}{10\,\omega_0}\,e^{-2\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\,z}.$$

Das v_φ der 2. Näherung wird dann unter Berücksichtigung der Randbedingungen

$$\begin{aligned} v_\varphi = {} & \underline{-\,\omega' r} - \frac{\omega'^2 r}{2\sqrt{\nu\,\omega_0}} \cdot z \cos\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z\, e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z} - \frac{\omega'^2 r}{5\,\omega_0} e^{-2\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z} \\ & \underline{+\,\omega' r \cos\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}} \cdot z\, e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z}} + \frac{\omega'^2 r}{5\,\omega_0} \cos\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z} \\ & + \frac{\omega'^2 r}{10\,\omega_0} \sin\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z\, e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z}, \end{aligned}$$

wo die unterstrichenen Glieder die Bestandteile der ersten Näherung sind, und das v_r der zweiten Näherung

$$\begin{aligned} v_r = {} & \underline{\omega' r \sin\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z\, e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z}} - \frac{\omega'^2 r}{2\sqrt{\nu\,\omega_0}}\, z\, e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z} \sin\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z \\ & + \frac{\omega'^2 r}{10\,\omega_0} e^{-2\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z} + e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z} \left(\frac{\omega'^2 r}{5\,\omega_0} \sin\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z - \frac{\omega'^2 r}{10\,\omega_0} \cos\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z \right), \end{aligned}$$

wo das unterstrichene Glied der Bestandteil der ersten Näherung ist. Die zweite Näherung v_z wird aus der Kontinuitätsgleichung zu

$$\begin{aligned} v_z = {} & -\frac{\omega'^2}{2\,\omega_0}\, z \cos\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z\, e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z} - \frac{\omega'^2}{2\,\omega_0} \cdot z \sin\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z\, e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z} \\ & + \frac{\omega'^2}{10\,\omega_0\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}} e^{-2\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z} + \left(\frac{\omega'}{\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}} - \frac{2\,\omega'^2}{5\,\omega_0\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}} \right) \cos\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z\, e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z} \\ & + \left(\frac{\omega'}{\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}} + \frac{3\,\omega'^2}{10\,\omega_0\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}} \right) \sin\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z\, e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}\, z} - \frac{\omega'}{\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}} + \frac{3\,\omega'^2}{10\,\omega_0\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}}. \end{aligned}$$

Zur Darstellung der Funktionen in Bild 1 machen wir v_r und v_φ mit $\omega' r$ und v_z mit $\sqrt{\nu\,|\omega'|}$ dimensionslos. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} f_1 = \frac{v_r}{\omega' r} = {} & -\left|\frac{\omega'}{2\,\omega_0}\right| \eta\, e^{-\eta} \sin\eta + \left|\frac{\omega'}{10\,\omega_0}\right| e^{-2\eta} \pm \sin\eta\, e^{-\eta} \\ & + \left|\frac{\omega'}{5\,\omega_0}\right| \sin\eta\, e^{-\eta} - \left|\frac{\omega'}{10\,\omega_0}\right| \cos\eta\, e^{-\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 = \frac{v_\varphi}{\omega' r} = {} & \mp 1 - \left|\frac{\omega'}{2\,\omega_0}\right| \eta \cos\eta\, e^{-\eta} - \left|\frac{\omega'}{5\,\omega_0}\right| e^{-2\eta} \pm \cos\eta^{-\eta} \\ & + \left|\frac{\omega'}{5\,\omega_0}\right| \cos\eta\, e^{-\eta} + \left|\frac{\omega'}{10\,\omega_0}\right| \sin\eta\, e^{-\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 = \frac{v_z}{\sqrt{\nu\,|\omega'|}} = {} & -\frac{1}{2}\left|\left(\frac{\omega'}{\omega_0}\right)^{3/2}\right| \eta\cos\eta\, e^{-\eta} - \frac{1}{2}\left|\left(\frac{\omega'}{\omega_0}\right)^{3/2}\right| \eta\sin\eta\, e^{-\eta} \\ & + \frac{1}{10}\left|\left(\frac{\omega'}{\omega_0}\right)^{3/2}\right| \cdot e^{-2\eta} + \left(\frac{\omega'}{\sqrt{\omega_0\,|\omega'|}} - \frac{2}{5}\left|\left(\frac{\omega'}{\omega_0}\right)^{3/2}\right| \right) \cos\eta\, e^{-\eta} \\ & + \left(\frac{\omega'}{\sqrt{\omega_0 \cdot |\omega'|}} + \frac{3}{10}\left|\left(\frac{\omega'}{\omega_0}\right)^{3/2}\right| \right) \sin\eta\, e^{-\eta} - \frac{\omega'}{\sqrt{\omega_0 \cdot |\omega'|}} + \frac{3}{10}\left|\left(\frac{\omega'}{\omega_0}\right)^{3/2}\right|, \end{aligned}$$

wobei $\eta = z\sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}$ ist und die oberen Vorzeichen für positives ω' und die unteren für negatives Gültigkeit haben. Für die beiden Fälle $\omega' = +\frac{1}{5}$ und $\omega' = -\frac{1}{5}$ wurde das Ergebnis aufgetragen (Bild 1 bis 3).

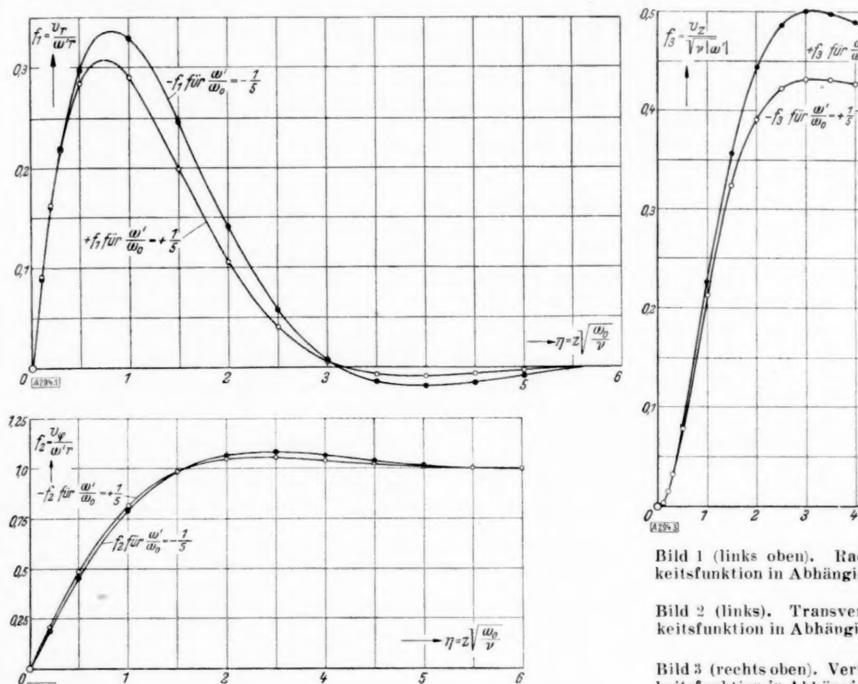


Bild 1 (links oben). **Radiale Geschwindigkeitsfunktion in Abhängigkeit von der Höhe.**

Bild 2 (links). **Transversale Geschwindigkeitsfunktion in Abhängigkeit von der Höhe.**

Bild 3 (rechts oben). **Vertikale Geschwindigkeitsfunktion in Abhängigkeit von der Höhe.**

Stromlinien.

Zur Ermittlung der Stromlinien bilden wir aus

$$\frac{v_r}{v_\varphi} = \frac{\mathrm{d}\,r}{r\,\mathrm{d}\,\varphi} \qquad r = e^{\frac{v_r}{v_\varphi}\varphi} \quad \text{(logarithmische Spirale)},$$

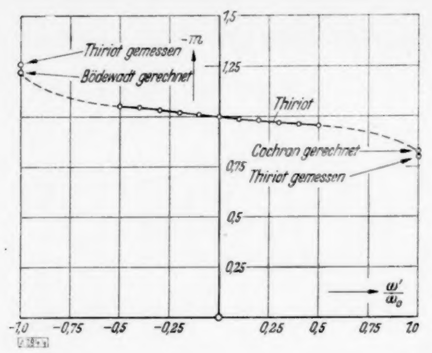
wobei $\frac{v_r}{v_\varphi}$ unabhängig von r ist. Wir untersuchen die Grenzschicht am Boden, wo z und damit auch $\eta = 0$ ist. Da sich dann für $\frac{v_r}{v_\varphi} = \frac{0}{0}$ ergibt, muß Zähler und Nenner differenziert und dann der Grenzübergang durchgeführt werden.

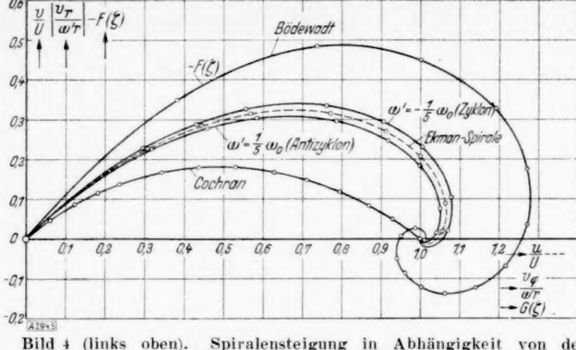
Der Exponent der e-Funktion wird dann gleich

$$\frac{v_r}{v_\varphi}_{(\text{für } \eta = 0)} = f\left(\frac{\omega'}{\omega_0}\right) = -1 \pm \frac{1}{10}\frac{\omega'}{\omega_0} - \frac{1}{50}\left(\frac{\omega'}{\omega_0}\right)^2 \pm \ldots,$$

wobei für $\omega' > 0$ positives und $\omega' < 0$ negatives Vorzeichen gilt. In Bild 4 sind die Ergebnisse dieser Rechnung dargestellt. Es sind zum Vergleich auch noch die folgenden Punkte miteinandergetragen: 1. die Strömung einer nichtrotierenden Flüssigkeit über einer rotierenden Scheibe $\left(\frac{\omega'}{\omega_0} = 1\right)$ nach der Theorie von Cochran (3) und nach Messungen des Verfassers im rotierenden Laboratorium des Göttinger Instituts, 2. die Strömung einer rotierenden Flüssigkeit über der nichtrotierenden Scheibe nach den Rechnungen von U. T. Bödewadt (4) $\left(\frac{\omega'}{\omega_0} = -\infty\right)$. Die beiden theoretischen Zahlenwerte sind $-m = 0{,}83$ und 1,26, die gemessenen 0,80 und 1,2.

Um bei größeren (positiven und negativen) $\frac{\omega'}{\omega_0}$-Werten etwa beim stationären Aus- und Anlauf größere Übereinstimmung zu schaffen, müßten noch weitere Näherungen gerechnet werden, was sich jedoch als äußerst mühsam erwies.





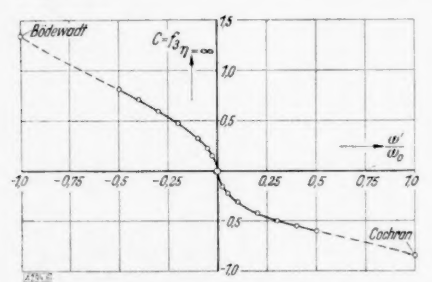


Bild 4 (links oben). Spiralensteigung in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeitsänderung.

Bild 5 (rechts oben). Ekmanspirale und deren Abweichungen bei Winkelgeschwindigkeitsänderung.

Bild 6 (links unten). Beiwert der vertikalen Geschwindigkeitsfunktion für große Höhe bei verschiedenen Winkelgeschwindigkeitsänderungen.

Um ein Bild über die Abweichung von der Ekman-Spirale (Geschwindigkeitsvektor abhängig von der Höhe) zu erhalten, wurde noch f_1 als Funktion von f_2 zusammen mit der Ekman-Spirale für die beiden Werte $\frac{\omega'}{\omega_0} = \pm \frac{1}{5}$ und die entsprechenden Werte von Cochran und Bödewadt aufgetragen (siehe Bild 5).

η	f_1 für $\frac{\omega'}{\omega_0}=\frac{1}{5}$	f_1 für $\frac{\omega'}{\omega_0}=-\frac{1}{5}$	f_2 für $\frac{\omega'}{\omega_0}=\frac{1}{5}$	f_2 für $\frac{\omega'}{\omega_0}=-\frac{1}{5}$	f_3 für $\frac{\omega'}{\omega_0}=\frac{1}{5}$	f_3 für $\frac{\omega'}{\omega_0}=-\frac{1}{5}$
0,1	0,0914	— 0,0892	— 0,1036	0,0958	— 0,0042	+ 0,0041
0,2	0,1633	— 0,1620	— 0,2051	0,1901	— 0,0158	+ 0,0155
0,3	0,2180	— 0,2199	— 0,3028	0,2818	— 0,0325	+ 0,0331
0,5	0,2846	— 0,2970	— 0,4819	0,4535	— 0,0786	+ 0,0796
1,0	0,2897	— 0,3294	— 0,8124	0,7901	— 0,2134	+ 0,2264
1,5	0,1988	— 0,2464	— 0,9835	0,9849	— 0,3239	+ 0,3573
2,0	0,1049	— 0,1412	— 1,0456	1,0671	— 0,3910	+ 0,4437
2,5	0,0402	— 0,0580	— 1,0512	1,0803	— 0,4222	+ 0,4871
3,0	0,0062	— 0,0078	— 1,0364	1,0622	— 0,4316	+ 0,5006
3,5	— 0,0067	+ 0,0145	— 1,0198	1,0367	— 0,4310	+ 0,4982
4,0	— 0,0086	+ 0,0191	— 1,0080	1,0160	— 0,4273	+ 0,4903
4,5	— 0,0064	+ 0,0154	— 1,0016	1,0031	— 0,4238	+ 0,4824
5,0	— 0,0035	+ 0,0094	— 0,9991	0,9971	— 0,4216	+ 0,4769

Zusammenfassung.

Um den Einfluß der Winkelgeschwindigkeitsänderung auf den Grenzschichtzustand über der rotierenden Scheibe zu übersehen, wurden die Grenzschichtgleichungen für den stationären Fall integriert und die bodennahen Stromlinien, die sich als logarithmische Spiralen ergeben, berechnet. Weiterhin wurden zusammenfassend die bisherigen Ergebnisse im Problem der rotierenden Scheibe in bezug auf das m im Exponent der logarithmischen Spiralen für die verschiedenen Fälle dargestellt.

Nicht verfehlen möchte ich, meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Prandtl, für die vielfache Anregung bei der Abfassung der Arbeit meinen ergebensten Dank zu sagen.

Schrifttumsverzeichnis.

(1) K. H. Thiriot: Über die laminare Anlaufströmung einer Flüssigkeit über einem rotierenden Boden bei plötzlicher Änderung des Drehungszustandes. Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940), S. 1—13.

(2) L. Prandtl: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandl. d. III. Intern. Mathematiker-Kongresses, Heidelberg 1904, S. 484. Siehe etwa auch die Darstellung von W. Tollmien im Handbuch der Experimentalphysik Bd. IV, Teil 1, S. 241 u. f. Leipzig 1931.

(3) W. G. Cochran: The flow due to a rotating disc. Proc. Cambr. Philos. Soc. Bd. 30 (1934), S. 365.

(4) U. T. Bödewadt: Die Drehströmung über festem Grunde. Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940), S. 241—253.

Halbebene mit periodisch gewelltem Rand.

Von *Constantin Weber* in Dresden.

Unter Benutzung einer konformen Abbildung der Halbebene mit geradem Rande auf eine Halbebene mit periodisch gewelltem Rande wird eine geschlossene Lösung für die Airysche Spannungsfunktion gebracht und die Anwendung an einem Beispiele gezeigt.

Wir bilden die z-Ebene konform auf die ζ-Ebene durch

$$z = \zeta + i\,a_1\,e^{i\zeta} + i\,a_2\,e^{i2\zeta} + \cdots i\,a_n\,e^{in\zeta} \qquad (1)$$

ab, wobei $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ganze reelle Zahlen sind.

Dann ist

$$x = \xi - a_1\,e^{-\eta}\sin\xi - \cdots - a_n\,e^{-n\eta}\sin n\,\xi \qquad (2),$$

$$y = \eta + a_1\,e^{-\eta}\cos\xi + \cdots + a_n\,e^{-n\eta}\cos n\,\xi \qquad (3).$$

Die obere ζ-Ebene $\eta \geqq 0$ geht hierbei in den oberen Teil der z-Ebene über, der durch eine periodisch gewellte Linie begrenzt ist, Bild 1. Wir wollen diesen Teil der z-Ebene als Halbebene mit periodisch gewelltem Rand bezeichnen.

Bild 1. Halbebene mit periodisch gewelltem Rand.

Dieser Teil der z-Ebene werde in x-Richtung gezogen, so daß für große Werte von y eine gleichmäßige Zugspannung $\sigma_{x,\infty} = 1$ entsteht.

Gesucht wird die Spannungserhöhung im Grunde der periodischen Kerben. Die Bestimmung der Airyschen Spannungsfunktion werde erst für den einfachsten Fall $z = \zeta + i\,a_1\,e^{i\zeta}$ gezeigt. Dann ist

$$x = \xi - a_1\,e^{-\eta}\sin\xi, \qquad y = \eta + a_1\,e^{-\eta}\cos\xi.$$

Die Airysche Spannungsfunktion lautet

$$F = \varphi_1 + \frac{1}{2}\,y\,(y + \varphi_2),$$

worin $\varphi_1 = \Re f_1(\zeta)$ und $\varphi_2 = \Re f_2(\zeta)$ Potentialfunktionen von ξ, η und damit von x, y sind.

Wir setzen

$$\varphi_1 = b_0 + b_1\,e^{-\eta}\cos\xi + b_2\,e^{-2\eta}\cos 2\,\xi,$$
$$\varphi_2 = c_0 + c_1\,e^{-\eta}\cos\xi.$$

Für große Werte von y geht $\varphi_1 \to b_0$, $\varphi_2 \to c_0$ und hiermit $F \to b_0 + \frac{1}{2}\,y\,(y + c_0)$. Die Spannung σ_x geht über in $\sigma_{x\,\infty} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 1$.

Für $\eta = 0$ muß bei unbelastetem Rand sowohl $F = 0$, als auch $\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$ werden.

Man erhält:

$$\begin{aligned} F &= b_0 + b_1\,e^{-\eta}\cos\xi + b_2\,e^{-2\eta}\cos 2\xi \\ &\quad + \frac{1}{2}(\eta + a_1\,e^{-\eta}\cos\xi)\,(\eta + c_0 + (a_1 + c_1)\,e^{-\eta}\cos\xi) \\ &= \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\eta\,c_0 + \frac{1}{2}\eta\,(2\,a_1 + c_1)\,e^{-\eta}\cos\xi + b_0 + \frac{1}{4}\,a_1\,(a_1 + c_1)\,e^{-2\eta} \\ &\quad + \left(b_1 + \frac{1}{2}\,a_1\,c_0\right)e^{-\eta}\cos\xi + \left(b_2 + \frac{1}{4}\,a_1(a_1 + c_1)\right)e^{-2\eta}\cos 2\xi \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \eta - \frac{1}{2}\eta\,(2\,a_1 + c_1)\,e^{-\eta}\cos\xi + \frac{1}{2}\,c_0 - \frac{1}{2}\,a_1\,(a_1 + c_1)\,e^{-2\eta} \\ &\quad - \left(b_1 + \frac{1}{2}\,a_1\,c_0 - a_1 - \frac{1}{2}\,c_1\right)e^{-\eta}\cos\xi - 2\left(b_2 + \frac{1}{4}\,a_1(a_1 + c_1)\right)e^{-2\eta}\cos 2\,\xi. \end{aligned}$$

Für $\eta=0$ müssen die einzelnen Glieder der cos-Entwicklungen gleich null werden.

Aus $F=0$ für $\eta=0$ erhält man:

$$b_0+\frac{1}{4}a_1(a_1+c_1)=0,$$

$$b_1+\frac{1}{2}a_1 c_0=0,$$

$$b_2+\frac{1}{4}a_1(a_1+c_1)=0.$$

Aus $\frac{\partial F}{\partial \eta}=0$ für $\eta=0$ erhält man:

$$\frac{1}{2}c_0-\frac{1}{2}a_1(a_1+c_1)=0,$$

$$b_1+\frac{1}{2}a_1 c_0-a_1-\frac{1}{2}c_1=0,$$

$$b_2+\frac{1}{4}a_1(a_1+c_1)=0.$$

Die sechste Bedingungsgleichung ist identisch mit der dritten, so daß zur Bestimmung der fünf Koeffizienten b_0, b_1, b_2 und c_0, c_1 auch nur fünf lineare Gleichungen zur Verfügung stehen.

Hiermit kann die Airysche Spannungsfunktion bestimmt werden, womit auch die Spannungen gegeben sind.

Wir wollen nunmehr zum allgemeinen Fall übergehen.

Die Halbebene mit periodisch gewelltem Rand wird nunmehr durch die Gl. (2) und (3) auf die Halbebene $\eta\geqq 0$ abgebildet. Die Reihen mögen mit den Gliedern $\sin n\xi$ und $\cos n\xi$ abbrechen. Alle Koeffizienten a_k mit $k>n$ und $k\lesseqgtr 0$ sind gleich null.

Für die Potentialfunktionen φ_1 und φ_2 der Airyschen Spannungsfunktion

$$F=\varphi_1+\frac{1}{2}y(y+\varphi_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

machen wir die Ansätze:

$$\varphi_1=b_0+b_1 e^{-\eta}\cos\xi+\cdots b_{2n}e^{-2n\eta}\cos 2n\xi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

$$\varphi_2=c_0+c_1 e^{-\eta}\cos\xi+\cdots c_n\, e^{-n\eta}\cos n\xi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Wesentlich ist, daß die Reihe von φ_1 mit $\cos 2n\xi$ und die Reihe von φ_2 mit $\cos n\xi$ endet. Alle nicht angeführten Koeffizienten b_k und c_k sind gleich null.

Wir erhalten $2n+1$ Koeffizienten für φ_1 und $n+1$ Koeffizienten für φ_2. Aus den Bedingungen $F=0$, $\frac{\partial F}{\partial \eta}=0$ für $\eta=0$ dürfen also höchstens $(3n+2)$ Gleichungen zur Bestimmung dieser Koeffizienten folgen.

Die Spannungsfunktion wird wie folgt umgeformt:

$$F=\sum_{k=0}^{k=2n} b_k e^{-k\eta}\cos k\xi+\frac{1}{2}\left(\eta+\sum_{k=0}^{k=n} a_k e^{-k\eta}\cos k\xi\right)\left(\eta+\sum_{h=0}^{h=n}(a_h+c_h)e^{-h\eta}\cos h\xi\right)$$

(mit $a_0=0$),

$$F=\frac{1}{2}\eta^2+\frac{1}{2}\eta\sum_{k=0}^{k=n}(2a_k+c_k)e^{-k\eta}\cos k\xi+\sum_{k=0}^{k=2n} b_k e^{-k\eta}\cos k\xi$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=n}\sum_{h=0}^{h=n} a_k(a_h+c_h)e^{-(k+h)\eta}\cos k\xi\cos h\xi,$$

$$F = \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\eta \sum_{k=0}^{k=n} (2a_k + c_k) e^{-k\eta} \cos k\xi + \sum_{k=0}^{k=2n} b_k e^{-k\eta} \cos k\xi$$
$$+ \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{k=n} \sum_{h=0}^{h=n} a_k (a_h + c_h) e^{-(k+h)\eta} \cos (k+h)\xi$$
$$+ \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{k=n} \sum_{h=0}^{h=n} a_k (a_h + c_h) e^{-(k+h)\eta} \cos (k-h)\xi .$$

Für $\eta = 0$ muß $F = 0$ sein, hieraus erhält man die Bedingungen

für die Glieder mit $\cos 0\xi$:

$$b_0 + \frac{1}{4} a_0 (a_0 + c_0) + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{k=n} a_k (a_k + c_k) = 0 \qquad (7),$$

für die Glieder mit $\cos(\pm m\xi)$, $0 < m \leq n$:

$$\left. \begin{aligned} & b_m + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{k=n} a_k (a_{m-k} + c_{m-k}) + \frac{1}{4} \sum_{k=m}^{k=n} a_k (a_{k-m} + c_{k-m}) \\ & + \frac{1}{4} \sum_{h=m}^{h=n} a_{h-m} (a_h + c_h) = 0 \end{aligned} \right\} \qquad (8),$$

für die Glieder mit $\cos m\xi$, $n < m \leq 2n$:

$$b_m + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{k=n} a_k (a_{m-k} + c_{m-k}) \qquad (9).$$

Die Ableitung $\frac{\partial F}{\partial \eta}$ wird:

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \eta - \frac{1}{2} \eta \sum_{k=0}^{k=n} k (2a_k + c_k) e^{-k\eta} \cos k\xi$$
$$- \sum_{k=0}^{k=2n} k\, b_k e^{-k\eta} \cos k\xi + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=n} (2a_k + c_k) e^{-k\eta} \cos k\xi$$
$$- \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{k=n} \sum_{h=0}^{h=n} (k+h) a_k (a_h + c_h) e^{-(k+h)\eta} \cos (k+h)\xi$$
$$- \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{k=n} \sum_{h=0}^{h=n} (k+h) a_k (a_h + c_h) e^{-(k+h)\eta} \cos (k-h)\xi .$$

Für $\eta = 0$ muß $\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$ sein; hieraus erhält man

für die Glieder mit $\cos 0\xi$:

$$\frac{1}{2} (2a_0 + c_0) - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{k=n} 2k\, a_k (a_k + c_k) = 0 \qquad (10),$$

für die Glieder mit $\cos(\pm m\,\xi)$, $0 < m \leq n$:

$$\left.\begin{aligned}&-m\,b_m + \frac{1}{2}(2\,a_m + c_m) - \frac{1}{4}\,m\sum_{k=0}^{k=n} a_k\,(a_{m-k} + c_{m-k})\\ &-\frac{1}{4}\sum_{k=m}^{k=n}(2\,k-m)\,a_k\,(a_{k-m} + c_{k-m}) - \frac{1}{4}\sum_{h=m}^{h=n}(2\,h-m)\,a_{h-m}\,(a_h + c_h) = 0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (11),$$

für die Glieder mit $\cos m\,\xi$, $n < m \leq 2\,n$:

$$-m\,b_m - \frac{1}{4}\,m\sum_{k=0}^{k=n} a_k\,(a_{m-k} + c_{m-k}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Wie man sieht, stimmen die Bedingungsgleichungen (12) mit den Bedingungsgleichungen (9) überein.

Auf diese Weise reduziert sich das System auf $(3\,n + 2)$ Bedingungsgleichungen.

Das Besondere des Ansatzes besteht darin, daß es hierdurch möglich ist, die Koeffizienten zu bestimmen und daß bei einer endlichen Anzahl von Gliedern in Gl. (2) und (3) auch die Potentialfunktionen φ_1 und φ_2 nach Gl. (5) und (6) nur endlich viele Glieder besitzen.

Für die später vorzunehmende Bestimmung der Spannungen im Kerbgrunde werden nur die Koeffizienten c_1 bis c_n benötigt. Zu ihrer Bestimmung addieren wir Gl. (11) und das m-fache der Gl. (8) und erhalten für $0 < m \leq n$ die n-Gleichungen mit $k - m = h - m = t$:

$$2\,a_m + c_m - \sum_{t=0}^{t=n-m} t\,[a_t\,(a_{t+m} + c_{t+m}) + a_{t+m}\,(a_t + c_t)] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Für $n = 5$ lauten diese Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}m = 1:\quad & 2\,a_1 + c_1 - [a_1\,(a_2 + c_2) + a_2\,(a_1 + c_1)]\\ & \qquad - 2\,[a_2\,(a_3 + c_3) + a_3\,(a_2 + c_2)]\\ & \qquad - 3\,[a_3\,(a_4 + c_4) + a_4\,(a_3 + c_3)]\\ & \qquad - 4\,[a_4\,(a_5 + c_5) + a_5\,(a_4 + c_4)] = 0,\\ m = 2:\quad & 2\,a_2 + c_2 - [a_1\,(a_3 + c_3) + a_3\,(a_1 + c_1)]\\ & \qquad - 2\,[a_2\,(a_4 + c_4) + a_4\,(a_2 + c_2)]\\ & \qquad - 3\,[a_3\,(a_5 + c_5) + a_5\,(a_3 + c_3)] = 0,\\ m = 3:\quad & 2\,a_3 + c_3 - [a_1\,(a_4 + c_4) + a_4\,(a_1 + c_1)]\\ & \qquad - 2\,[a_2\,(a_5 + c_5) + a_5\,(a_2 + c_2)] = 0,\\ m = 4:\quad & 2\,a_4 + c_4 - [a_1\,(a_5 + c_5) + a_5\,(a_1 + c_1)] = 0,\\ m = 5:\quad & 2\,a_5 + c_5 = 0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Die Spannung im Kerbgrunde wird $\sigma_{x,0} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{\xi=0,\,\eta=0}$; da dort $\sigma_{y,0} = 0$ ist, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{x,0} &= \sigma_{x,0} + \sigma_{y,0} = (\Delta F)_{\xi=0,\,\eta=0} = \Delta\left(\varphi_1 + \frac{1}{2}\,y\,(y + \varphi_2)\right)\\ &= 1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} : \frac{\partial y}{\partial \eta} = 1 - \frac{c_1 + 2\,c_2 + 3\,c_3 + \cdots}{1 - a_1 - 2\,a_2 - 3\,a_3 - \cdots}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

(Diese einfache Beziehung gilt natürlich nur für die Stelle $\xi = 0$, $\eta = 0$.)

Beispiel. Für eine Halbebene mit periodischen Halbkreiskerben nach Bild 2 wollen wir die Spannungserhöhung im Kerbgrunde finden. Die Periodenlänge ist $l = 2\,\pi$, der Halbmesser der Kerben sei $\varrho = \frac{\pi}{2}$. Wir ersetzen die Begrenzung der Halbebene durch eine Begrenzung nach Gl. (2) und (3) mit $\eta = 0$ und nehmen $n = 4$, so daß wir vier Koeffizienten a_1, a_2, a_3 und a_4 wählen können. Zu ihrer Bestimmung nehmen wir



Bild 2. Halbebene mit periodischen Halbkreiskerben.

folgende Bedingungen: Kerbtiefe $t=\frac{\pi}{2}$; Krümmungshalbmesser $\varrho_0=\frac{\pi}{2}$; zweite Ableitung des Krümmungshalbmessers im Kerbgrunde beim Übergang zum Nachbarpunkte gleich Null. Eine vierte Bedingung wählen wir nicht, sondern suchen aus der Schar der so erhaltenen Begrenzungslinien gefühlsmäßig die günstigste aus.

Die drei gewählten Bedingungen geben folgende Gleichungen für den Rand $\eta=0$:

$$y_{(\xi=0)}-y_{(\xi=\pi)}=2\,(a_1+a_3)=t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (16),$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}:\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2\right]_{\xi=0}=\frac{-a_1-4a_2-9a_3-16a_4}{(1-a_1-2a_2-3a_3-4a_4)^2}=-\frac{1}{\varrho_0} \quad \ldots \ldots \ldots (17).$$

Aus der dritten Bedingung folgt:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2-4\,\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\,\frac{\partial^3 x}{\partial \xi^3}\,\frac{\partial x}{\partial \xi}-3\left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\right)^3=0.$$

Setzt man hierin $\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2=-\varrho\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$ nach Gl. (17) ein, so vereinfacht sich die letzte Gleichung in:

$$\left.\begin{aligned}-\varrho\,\frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4}-4\,\frac{\partial^3 x}{\partial \xi^2}\,\frac{\partial x}{\partial \xi}-3\left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\right)^2&=-\varrho\,(a_1+16a_2+81a_3+256a_4)\\ -4\,(a_1+8a_2+27a_3+64a_4)\,(1-a_1-2a_2-3a_3-4a_4)&\\ -3\,(a_1+4a_2+9a_3+16a_4)^2=0&\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (18).$$

Die Gleichungen sind nach Wahl eines Koeffizienten durch Probieren gelöst.

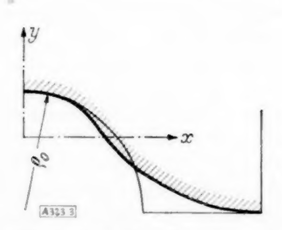


Bild 3. Gewählte Begrenzung.

Es wurden folgende Werte gewählt:

$$a_1=0{,}740,\quad a_2=-0{,}224,$$
$$a_3=0{,}045,\quad a_4=-0{,}003.$$

Bild 3 zeigt die sich hieraus ergebende Begrenzungslinie.

Nunmehr berechnen wir nach Gleichungssystem (14) die Koeffizienten c_1, c_2, c_3, c_4. Vorübergehend schreiben wir $a_1+c_1=d_1$, $a_2+c_2=d_2$, $a_3+c_3=d_3$, $a_4+c_4=d_4$ und erhalten die Gleichungen:

$$1{,}224\,d_1-0{,}83\;d_2+0{,}457\,d_3-0{,}135\,d_4+0{,}740=0,$$

$$-0{,}045\,d_1+1{,}006\,d_2-0{,}740\,d_3+0{,}448\,d_4-0{,}224=0,$$

$$0{,}003\,d_1\qquad\qquad+d_3-0{,}740\,d_4+0{,}045=0,$$

$$d_4-0{,}003=0,$$

mit der Lösung $d_1=-0{,}474$, $d_2=0{,}170$, $d_3=-0{,}042$, $d_4=0{,}003$ und hieraus $c_1=-1{,}214$, $c_2=0{,}394$, $c_3=-0{,}087$, $c_4=0{,}006$.

Die Spannung im Kerbgrunde wird nach Gl. (15):

$$\sigma_{x,0}=1+\frac{0{,}663}{0{,}585}=2{,}13.$$

Man erhält eine 2,13-fache Spannungserhöhung, während bei einer einmaligen Halbkreiskerbe eine 3,07-fache Spannungserhöhung entsteht.

Z. angew. Math. Mech. Bd. 22 Nr. 1 Febr. 1942

Von den freien Schwingungen eines Kreiselpendels bei endlichen Ausschlägen. II.

Von *U. T. Bödewadt* in Göttingen.

In der ersten Mitteilung war das Gleichungssystem des Kreiselpendels durch ein einfacheres ersetzt worden, um daran die Methode darzustellen: Entwicklung der periodischen Eigenlösungen in Fourierreihen nach der Zeit, Entwicklung der Fourierkoeffizienten in Potenzreihen nach der Schwingungsweite. In dieser Mitteilung wird das strenge Gleichungssystem aufgestellt und nach derselben Methode behandelt; ein Zahlenbeispiel ist hinzugefügt.

Die erste Veröffentlichung des Verfassers über diesen Gegenstand[1]) enthielt insofern noch eine Unrichtigkeit, als die dort angenommenen Gleichungen I (1.1) nicht eigentlich die Gleichungen des Schiffskreisels waren[2]), sondern aus ihnen erst durch Symmetrisierung entstanden sind. Dadurch wurde die Darstellung der mathematischen Behandlung vereinfacht; doch ging andererseits die Beziehung zum physikalischen Gegenstand halbwegs verloren, insbesondere hatte die Durchrechnung des Zahlenbeispiels in I, § 9 nicht viel Sinn. In dieser zweiten Veröffentlichung soll darum ein besser zutreffendes Gleichungssystem abgeleitet und nach der in I dargestellten Methode behandelt werden. Da die grundsätzlichen Überlegungen ungeändert bleiben[3]), sollen hier nur die neuen Entwicklungen formelmäßig angegeben und das Zahlenbeispiel neu durchgerechnet werden.

1.

Wir legen unserer Betrachtung ein mechanisches Modell zugrunde, das aus drei in sich starren Teilsystemen besteht: aus Schiff, Kreiselrahmen und Kreisel. Das Schiff soll eine Symmetrieebene haben. In dieser liegt waagerecht die Rollachse, um welche das Schiff pendeln („rollen") kann. Diese soll raumfest sein, d. h. Kursänderungen und Stampfbewegungen des Schiffes bleiben außer Betracht. Im Schiff liegt senkrecht zur Symmetrieebene die Lagerachse. Um diese ist der Kreiselrahmen drehbar, der wieder die Kreiselachse trägt, um die sich der Kreisel drehen kann. Die Kreiselachse soll stets in der Symmetrieebene des Schiffes liegen und die Lagerachse schneiden. — Wir führen mehrere kartesische Koordinatensysteme ein: ein im Raume festes System $x\,y\,z$, ein schiffsfestes System $u\,v\,w$, ein rahmenfestes System $\xi\,\eta\,\zeta$ und ein kreiselfestes System $U\,V\,W$. In der Ruhelage des Gesamtsystems fallen alle Koordinatensysteme zusammen, der gemeinsame Nullpunkt ist der Schnittpunkt von Lagerachse und Kreiselachse; das Steuerbordende der Lagerachse gibt die Richtungen $+x$, $+u$, $+\xi$, $+U$, waagerecht voraus laufen parallel zur Rollachse im Abstande l unter ihr die $+y$, $+v$, $+\eta$, $+V$-Achsen, und lotrecht nach oben gehen die $+z$, $+w$, $+\zeta$, $+W$-Achsen. Außerhalb der Ruhelage fallen stets die $+W$ und die $+\zeta$-Richtungen in der Kreiselachse zusammen, die $+u$ und die $+\xi$-Richtung in der Lagerachse, während die $+y$ und $+v$-Richtungen immer parallel zu der raum- und schiffsfesten Rollachse bleiben. Zur Beschreibung der gegenseitigen Lage der drei Modellteile zueinander benutzen wir drei Winkel:

$$\psi = \sphericalangle(+z,\ +w) \text{ im Drehsinne } (+z \ldots + x);$$

$$\vartheta = \sphericalangle(+w,\ +\zeta) \text{ im Drehsinne } (+v \ldots + w);$$

$$\varphi = \sphericalangle(+\xi,\ +U) \text{ im Drehsinne } (+\xi \ldots + \eta).$$

Der Kreisel soll symmetrisch sein, sein Schwerpunkt also in der Kreiselachse liegen und sein Trägheitsmoment um die Lagerachse unabhängig von φ sein. Der Rahmen soll symmetrisch zur Ebene $\eta = 0$ sein; und der Schwerpunkt des Gesamtsystems soll in der Symmetrieebene des Schiffes liegen.

Dieses Modell hat dann drei Freiheitsgrade ψ, ϑ, φ (Translationen kommen nicht in Betracht). Seine Lagrangesche Funktion

$$L_1 = \int \left\{ \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - g\,z \right\} \mathrm{d}\,m$$

[1]) Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940), S. 218 bis 234. — Im folgenden mit „I" zitiert.

[2]) Herrn E. Schmid habe ich dafür zu danken, daß er mich hierauf wieder aufmerksam machte.

[3]) Lediglich die Bemerkungen in I, § 3 sind dahin zu ergänzen, daß die Konvergenzgrenze aus physikalischen Gründen wahrscheinlich bei einer Schwingungsweite von $M = 90^{0}$ liegen wird, da darüber hinaus bereits zyklische (nicht mehr periodische) Lösungen auftreten.

hat unter Fortlassung einer unwesentlichen Konstanten bei Umrechnung auf die Veränderlichen ψ, ϑ, φ das Aussehen

$$L_1 = \frac{1}{2}\,\dot\psi^2\,\{J + E\sin^2\vartheta - m\,h\,l\,(1-\cos\vartheta)\}$$
$$+\frac{1}{2}\,j\,\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}\,C\,\dot\varphi^2 + K\sin\vartheta\,\dot\psi\,\dot\vartheta - C\sin\vartheta\,\dot\psi\,\dot\varphi + (Q\,H - q\,h)\cos\psi + q\,h\cos\psi\cos\vartheta\,.$$

Hierin bedeutet J das Trägheitsmoment des Gesamtsystems um die Rollachse bei $\vartheta=0$; E ist das Moment $\int(\eta^2-\zeta^2)\,\mathrm{d}m$ von Kreisel mit Kreiselrahmen; m die Masse, $q=m\,g$ das Gewicht von Kreisel und Kreiselrahmen; $-h$ die ζ-Koordinate des Schwerpunktes von Kreisel mit Kreiselrahmen; l der Abstand zwischen Lagerachse und Rollachse; j das Trägheitsmoment von Kreisel mit Kreiselrahmen um die Lagerachse, C das Trägheitsmoment des Kreisels um seine Achse, K das Auslenkungsmoment $\int\xi\,\zeta\,\mathrm{d}m$ des Kreiselrahmens, Q das Gewicht des Gesamtsystems, H die metrazentrische Höhe des Schiffes, d. h. der Abstand des Schwerpunktes des Gesamtsystems (im Zustande $\vartheta=0$) von der (durch des Metazentrum gehenden) Rollachse.

Für den Drehimpuls um die Kreiselachse ergibt sich Konstanz:

$$p_\varphi = C\,(\dot\varphi - \sin\vartheta\,\dot\psi) = N.$$

Man kann also die Veränderliche φ und ihre Ableitung eliminieren und muß dann die Funktion

$$L_2 = \frac{1}{2}\,\dot\psi^2\,\{J + (E-C)\sin^2\vartheta - m\,h\,l\,(1-\cos\vartheta)\}$$
$$+\frac{1}{2}\,j\,\dot\vartheta^2 + K\sin\vartheta\,\dot\psi\,\dot\vartheta - N\sin\vartheta\,\dot\psi + (Q\,H - q\,h)\cos\psi + q\,h\cos\psi\cos\vartheta$$

verwenden. Läßt man hier bei $\dot\psi^2$ die von ϑ abhängigen Glieder fort, vernachlässigt also $C-E$ (das ist im wesentlichen das Trägheitsmoment des Kreisels um die Lagerachse) und $m\,h\,l$ gegen J, ferner K gegen J und j, so bleibt

$$L_3 = \frac{1}{2}\,J\,\dot\psi^2 + \frac{1}{2}\,j\,\dot\vartheta^2 - N\sin\vartheta\,\dot\psi + (Q\,H - q\,h)\cos\psi + q\,h\cos\vartheta\cos\psi\,.$$

Somit werden die Bewegungsgleichungen, wenn man in der ersten noch $q\,h$ gegen $Q\,H$ vernachlässigt:

$$\left.\begin{aligned} J\,\ddot\psi + Q\,H\sin\psi \qquad\qquad - N\cos\vartheta\,\dot\vartheta &= 0,\\ j\,\ddot\vartheta + q\,h\,\cos\psi\sin\vartheta + N\cos\vartheta\,\dot\psi &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Die Gleichungen I (1.1) waren hieraus entstanden, indem in der zweiten Gleichung $\cos\psi$ in 1 und $\cos\vartheta$ in $\cos\psi$ geändert wurden; so wiesen die geänderten Gleichungen dasselbe Maß an Symmetrie auf wie im linearen Grenzfall. Ohne diese Änderung ist es zwar auch noch möglich, die Gl. (1) in ψ zu linearisieren und dadurch auf eine Gleichung vierter Ordnung für ϑ allein zu kommen, doch wird diese dann so viel verwickelter gegenüber der Gleichung I (3.8), daß sich die Elimination nicht lohnt. Wir gehen also nach der in I § 10 angedeuteten Methode vor und brauchen uns dann auch nicht in ψ auf kleine Winkel zu beschränken.

2.

Schreibt man in den Gl. (1) x für ψ und y für ϑ, so gelangt man durch Division mit J und j zu der Form

$$\left.\begin{aligned} \ddot x + a^2\sin x \qquad\qquad - h\cos y\,\dot y &= 0,\\ \ddot y + b^2\cos x\sin y + k\cos y\,\dot x &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Wir suchen die reinperiodischen Lösungen der Form

$$\left.\begin{aligned} x &= \sum_{\nu=0}^{\infty} M\,A_\nu\sin(2\,\nu+1)\,\omega\,t,\\ y &= \sum_{\nu=0}^{\infty} M\,B_\nu\cos(2\,\nu+1)\,\omega\,t \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

die die Bedingung

$$y\,(0) = M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

erfüllen und für $M\to 0$ in Form und Periode in die Lösungen des linearen Grenzfalles übergehen. Für die in (2) auftretenden Funktionen von x und y ergeben sich Entwicklungen der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' M\, C_\nu \sin(2\nu+1)\,\omega t, \\ \sin y &= \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' M\, D_\nu \cos(2\nu+1)\,\omega t, \\ \cos x \sin y &= \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' M\, E_\nu \cos(2\nu+1)\,\omega t, \\ \cos y \cdot \dot{x} &= \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' M\, F_\nu (2\nu+1)\,\omega \cos(2\nu+1)\,\omega t \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (5).$$

Einsetzen von (3) und (5) in (2) liefert für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\left.\begin{aligned} (2\nu+1)^2 \omega^2 A_\nu - a^2 C_\nu - (2\nu+1)\,\omega h D_\nu &= 0, \\ (2\nu+1)^2 \omega^2 B_\nu - b^2 E_\nu - (2\nu+1)\,\omega k F_\nu &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6).$$

Unter der i. A. zutreffenden Voraussetzung, daß keine „Grenzresonanz" stattfindet (vgl. I § 4), haben die für hinreichend kleine Werte von M möglichen Potenzreihenentwicklungen der Größen A_ν, B_ν, C_ν, D_ν, E_ν, F_ν die Form

$$A_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty}{}' \lambda^n A_{n\nu} \quad \text{mit } \lambda = M^2 \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Dabei kann man setzen

$$\left.\begin{aligned} C_{n\nu} &= A_{n\nu} + c_{n\nu}; \quad & D_{n\nu} &= B_{n\nu} + d_{n\nu}; \\ E_{n\nu} &= B_{n\nu} + e_{n\nu}; \quad & F_{n\nu} &= A_{n\nu} + f_{n\nu} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

und die Zusatzgrößen $c_{n\nu}$, $d_{n\nu}$, $e_{n\nu}$, $f_{n\nu}$ können aus den $A_{m\mu}$ und $B_{m\mu}$ mit $m < n$ berechnet werden. Die Formeln dafür bis $n = 4$ sind unten in Tafeln zusammengestellt. — Auch die Frequenz wird als Potenzreihe in λ angesetzt:

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \lambda^n \omega_n; \qquad \omega^2 = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \lambda^n \varphi_n \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Es ist also $\varphi_n = \omega_0 \omega_n + \omega_1 \omega_{n-1} + \cdots + \omega_n \omega_0$, insbesondere am Anfang $\varphi_0 = \omega_0^2$. Wir setzen ferner

$$\varphi_n' = \varphi_n - 2\,\omega_0 \omega_n = \sum_{m=1}^{n-1}{}' \omega_m \omega_{n-m} \quad (n \geqq 1) \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Durch Einführung der Potenzreihen (7), (9) in (6) entsteht

$$\left.\begin{aligned} (2\nu+1)^2 \sum_{m=0}^{n-\nu}{}' \varphi_m A_{n-m,\nu} - a^2 C_{n\nu} - (2\nu+1)\, h \sum_{m=0}^{n-\nu}{}' \omega_m D_{n-m,\nu} &= 0, \\ (2\nu+1)^2 \sum_{m=0}^{n-\nu}{}' \varphi_m B_{n-m,\nu} - b^2 E_{n\nu} - (2\nu+1)\, k \sum_{m=0}^{n-\nu}{}' \omega_m F_{n-m,\nu} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (11).$$

Für $n = 0$ bleiben die Gleichungen[4]) des linearen Grenzfalles:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - a^2)\, A - h\,\omega_0 \quad &= 0, \\ -k\,\omega_0 A + (\omega_0^2 - b^2) &= 0, \end{aligned}$$

aus denen bekanntlich

$$\omega_0^4 - (a^2 + b^2 + h \cdot k)\,\omega_0^2 + a^2 b^2 = 0$$

und damit $\omega_0^2 < \min(a^2, b^2)$ bzw. $\max(a^2, b^2) < \omega_0^2$ folgt, sowie

$$A = \frac{h\,\omega_0}{\omega_0^2 - a^2} = \frac{\omega_0^2 - b^2}{k\,\omega_0} = \sqrt{\frac{h}{k}} \sqrt{\frac{\omega_0^2 - b^2}{\omega_0^2 - a^2}}.$$

Für $n > 0$ sind zunächst in den Fällen $\nu > 0$ die beiden Unbekannten $A_{n\nu}$, $B_{n\nu}$ aus dem Gleichungspaar (11) zu bestimmen. Nach diesen Unbekannten geordnet heißen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A_{n\nu} \{(2\nu+1)^2 \varphi_0 - a^2\} + B_{n\nu} \{-(2\nu+1)\, h\,\omega_0\} &= G_{n\nu}, \\ A_{n\nu} \{-(2\nu+1)\, k\,\omega_0\} + B_{n\nu} \{(2\nu+1)^2 \varphi_0 - b^2\} &= H_{n\nu} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (12),$$

wobei $G_{n\nu}$ und $H_{n\nu}$ Abkürzungen sind für[5])

[4]) Dabei ist benutzt worden, daß aus (4) $B_{00} = 1$ folgt; ferner wurde zur Abkürzung $A_{00} = A$ geschrieben.
[5]) Die in (13) rechts stehenden Summen sind leer für $\nu = n$.

$$\left.\begin{aligned} G_{n\nu} &= -(2\nu+1)^2 \sum_{m=1}^{n-\nu} \varphi_m A_{n-m,\nu} + a^2 c_{n\nu} + (2\nu+1)\, h \left\{\omega_0 d_{n\nu} + \sum_{m=1}^{n-\nu} \omega_m D_{n-m,\nu}\right\}, \\ H_{n\nu} &= -(2\nu+1)^2 \sum_{m=1}^{n-\nu} \varphi_m B_{n-m,\nu} + b^2 e_{n\nu} + (2\nu+1)\, k \left\{\omega_0 f_{n\nu} + \sum_{m=1}^{n-\nu} \omega_m F_{n-m,\nu}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (13).$$

Die Determinante des Gleichungssystems (12) ist

$$\Delta_\nu = 8\nu(\nu+1)\varphi_0 \left\{(1+2\nu(\nu+1))\,\varphi_0 - \frac{1}{2}(a^2+b^2+h\,k)\right\} \quad (14).$$

Unsere Voraussetzung, daß keine Grenzresonanz stattfindet, sagt das Nichtverschwinden der Determinante (14) aus.

Setzen wir also für $\nu > 0$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_\nu &= \{(2\nu+1)^2 \varphi_0 - b^2\} : \Delta_\nu, \\ \beta_\nu &= (2\nu+1)\, k\, \omega_0 : \Delta_\nu, \\ \gamma_\nu &= (2\nu+1)\, h\, \omega_0 : \Delta_\nu, \\ \delta_\nu &= \{(2\nu+1)^2 \varphi_0 - a^2\} : \Delta_\nu \end{aligned}\right\} \quad (15),$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} A_{n\nu} &= \alpha_\nu G_{n\nu} + \gamma_\nu H_{n\nu}, \\ B_{n\nu} &= \beta_\nu G_{n\nu} + \delta_\nu H_{n\nu} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

die Auflösung von (12). — Sind die Größen $A_{n\nu}$, $B_{n\nu}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ berechnet, dann ergibt sich aus (4)

$$B_{n0} = -\sum_{\nu=1}^{n} B_{n\nu} \quad (17).$$

Für $\nu = 0$ enthalten die Gl. (11) die beiden Unbekannten A_{n0} und ω_n:

$$\left.\begin{aligned} A_{n0}(\varphi_0 - a^2) + \omega_n(2\omega_0 A - h) &= G_{n0} + h\,\omega_0 B_{n0}, \\ A_{n0}(-k\,\omega_0) + \omega_n(2\omega_0 - k A) &= H_{n0} + (b^2 - \varphi_0) B_{n0} \end{aligned}\right\} \quad (18);$$

darin bedeuten G_{n0}, H_{n0} folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} G_{n0} &= -\sum_{m=1}^{n-1} \varphi_m A_{n-m,0} - \varphi_n' A + a^2 c_{n0} + h\left(\omega_0 d_{n0} + \sum_{m=1}^{n-1} \omega_m D_{n-m,0}\right), \\ H_{n0} &= -\sum_{m=1}^{n-1} \varphi_m B_{n-m,0} - \varphi_n' \quad + b^2 e_{n0} + k\left(\omega_0 f_{n0} + \sum_{m=1}^{n-1} \omega_m F_{n-m,0}\right) \end{aligned}\right\} \quad (19).$$

Die Determinante des Systems (18) ist

$$\Delta_0 = \frac{2}{\omega_0}(\varphi_0^2 - a^2 b^2) \quad (20),$$

verschwindet also nicht; denn sonst müßte ω_0^2 als geometrisches Mittel zwischen a^2 und b^2 liegen, während beide Werte von ω_0^2 außerhalb des Intervalles $(a^2 \ldots b^2)$ liegen. Wenn man nun setzt

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= (2\omega_0 - k A) : \Delta_0, \\ \gamma_0 &= (h - 2\omega_0 A) : \Delta_0, \\ \varepsilon &= k\,\omega_0 : \Delta_0, \\ \eta &= (\varphi_0 - a^2) : \Delta_0 \end{aligned}\right\} \quad (21),$$

so ist die Lösung von (18):

$$\left.\begin{aligned} A_{n0} &= \alpha_0 G_{n0} + \gamma_0 H_{n0} + A\, B_{n0}, \\ \omega_n &= \varepsilon\, G_{n0} + \eta\, H_{n0} \end{aligned}\right\} \quad (22).$$

Der Frequenzkoeffizient ω_n hängt also nicht von B_{n0} und damit nicht von den Amplitudenkoeffizienten der gleichen Stufe ab.

Es sind jetzt alle Formeln angegeben, um schrittweise die Koeffizienten der Reihen (3), (7), (9) für jede Ordnung berechnen zu können; nur die Ausdrücke für $c_{n\nu}$, $d_{n\nu}$, $e_{n\nu}$, $f_{n\nu}$ fehlen noch. Bis $n = 4$ sind die c, e, f in den nachstehenden Tafeln 1 bis 3 angegeben. Für die $d_{n\nu}$ waren die Ausdrücke bereits in I (Tafel 1[6])) mitgeteilt worden; man hat jetzt nur

[6]) Leider enthält jene Tafel einen Fehler: in E_{40} muß der Zähler des Faktors von C_{10} eine 7 sein (nicht 1).

noch die dortigen Bezeichnungen $C_{n\nu}$, $E_{n\nu}$, in $B_{n\nu}$, $d_{n\nu}$ abzuändern. Jedoch lassen sich die Formeln für die $d_{n\nu}$ auch aus der untenstehenden Tafel 1 für die $c_{n\nu}$ gewinnen, indem man dort $A_{n\nu}$ durch $(-1)^\nu B_{n\nu}$ und $c_{n\nu}$ durch $(-1)^\nu d_{n\nu}$ ersetzt; die so erhaltenen Ausdrücke können dann durch Ausnützung der Beziehungen $B_{00}=1$ und (17) vereinfacht werden. — $h_1, h_2, \dots h_{27}$ und $H^1, H^2, \dots H^{16}$ sind Hilfsgrößen, die eingeführt wurden, um die Berechnung zu vereinfachen. Aus dem gleichen Grunde wurden in Tafel 2 auch die $D_{n\nu}$ und $d_{n\nu}$ verwendet.

3.

Nach den oben abgeleiteten Formeln wurde das in I § 9 gewählte Zahlenbeispiel erneut durchgerechnet. Es sind also für die in (2) vorkommenden Konstanten folgende Werte angenommen worden:

$$a^2 = 0{,}62; \quad b^2 = 0{,}56; \quad h = 0{,}06; \quad k = 221.$$

Tafel 1. Formeln für die durch (4), (5), (7), (8) erklärten $c_{n\nu}$

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} M^{2n+1} A_{n\nu} \sin(2\nu+1)\tau; \qquad \sin x - x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} M^{2n+1} c_{n\nu} \sin(2\nu+1)\tau$$

$$c_{00} = 0. \qquad c_{11} = +\frac{1}{24} A^3. \qquad c_{10} = -3\, c_{11}. \qquad (A = A_{00}).$$

$$h_1 = \frac{1}{8} A^2. \qquad h_2 = \frac{1}{1920} A^5.$$

$$c_{22} = h_1 \cdot A_{11} + h_2. \qquad c_{21} = h_1 (A_{10} - 2 A_{11}) - 5 h_2. \qquad c_{20} = h_1 (A_{11} - 3 A_{10}) + 10 h_2.$$

$$h_3 = \frac{1}{384} A^4. \qquad h_4 = \frac{1}{322560} A^7.$$

$$c_{33} = h_1 \cdot A_{22} + \frac{1}{8} A \cdot A_{11}^2 + h_3 \cdot A_{11} + h_4.$$

$$c_{32} = h_1 (A_{21} - 2 A_{22}) + \frac{1}{8} A (2 A_{10} A_{11} - A_{11}^2) + h_3 (A_{10} - 4 A_{11}) - 7 h_4.$$

$$c_{31} = h_1 (A_{20} - 2 A_{21} + A_{22}) + \frac{1}{8} A (A_{10}^2 - 4 A_{10} A_{11}) + h_3 (-5 A_{10} + 6 A_{11}) + 21 h_4.$$

$$c_{30} = h_1 (\;\; 3 A_{20} + A_{21}) + \frac{1}{8} A (-3 A_{10}^2 + 2 A_{10} A_{11} - 2 A_{11}^2) + h_3 (10 A_{10} - 5 A_{11}) - 35 h_4.$$

$$h_5 = \frac{1}{192} A^3. \qquad h_6 = \frac{1}{46080} A^6. \qquad h_7 = \frac{1}{92897280} A^9.$$

$$c_{44} = h_1 \cdot A_{33} + \frac{1}{4} A \cdot A_{11} A_{22} + h_3 \cdot A_{22} + \frac{1}{24} A_{11}^3 + h_5 A_{11}^2 + h_6 A_{11} + h_7.$$

$$c_{43} = h_1 (A_{32} - 2 A_{33}) + \frac{1}{4} A \{A_{10} A_{22} + A_{11} (A_{21} - A_{22})\} + h_3 (A_{21} - 4 A_{22})$$
$$+ \frac{1}{8} A_{10} A_{11}^2 + h_5 (2 A_{10} A_{11} - 3 A_{11}^2) + h_6 (A_{10} - 6 A_{11}) - 9 h_7.$$

$$c_{42} = h_1 (A_{31} - 2 A_{32} + A_{33}) + \frac{1}{4} A \{A_{10} (A_{21} - 2 A_{22}) + A_{11} (A_{20} - A_{21})\} + h_3 (A_{20} - 4 A_{21} + 6 A_{22})$$
$$+ \frac{1}{8} A_{10} A_{11} (A_{10} - A_{11}) + h_5 (A_{10}^2 - 8 A_{10} A_{11} + 3 A_{11}^2) + h_6 (-7 A_{10} + 15 A_{11}) + 36 h_7.$$

$$c_{41} = h_1 (A_{30} - 2 A_{31} + A_{32}) + \frac{1}{4} A \{A_{10} (A_{20} - 2 A_{21} + A_{22}) - A_{11} (2 A_{20} + A_{22})\} + h_3 (-5 A_{20} + 6 A_{21} - 4 A_{22})$$
$$+ \frac{1}{24} A_{10}^3 - \frac{1}{8} A_{11} (2 A_{10}^2 + A_{11}^2) + h_5 (-5 A_{10}^2 + 12 A_{10} A_{11} - 3 A_{11}^2) + h_6 \cdot 21 (A_{10} - A_{11}) - 84 h_7.$$

$$c_{40} = h_1 (-3 A_{30} + A_{31}) + \frac{1}{4} A \{A_{10} (-3 A_{20} + A_{21}) + A_{11} (A_{20} - 2 A_{21} + A_{22})\} + h_3 (10 A_{20} - 5 A_{21} + A_{22})$$
$$+ \frac{1}{8} A_{10} (-A_{10}^2 + A_{10} A_{11} - 2 A_{11}^2) + h_5 (10 A_{10}^2 - 10 A_{10} A_{11} + 6 A_{11}^2) + h_6 (-35 A_{10} + 21 A_{11}) + 126 h_7.$$

Tafel 4 zeigt die zunächst erhaltenen Koeffizienten für die Potenzreihen und läßt erkennen, daß die Konvergenz bei nicht zu großen Ausschlägen recht gut ist. Nimmt man als Ausschlagweite zum Beispiel $M = 60°$ an, so findet man in Tafel 5 die erhaltenen Werte für die Frequenz und die Amplituden der Fourier-Teilschwingungen. Ein Vergleich dieser Zahlen mit denen, die man aus dem linearen Ansatz

$$\ddot{x} + a^2 x - h \dot{y} = 0; \quad \ddot{y} + b^2 y + k \dot{x} = 0$$

Tafel 2. Formeln für die durch (4), (5), (7), (8) erklärten $e_{n\nu}$

$$\sin y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} M^{2n+1} D_{n\nu} \cos(2\nu+1)\tau; \qquad \sin y - y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} M^{2n+1} d_{n\nu} \cos(2\nu+1)\tau;$$

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} M^{2n+1} A_{n\nu} \sin(2\nu+1)\tau; \qquad \cos x \sin y - y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} M^{2n+1} e_{n\nu} \cos(2\nu+1)\tau .$$

$e_{00} = 0 . \qquad e_{11} = d_{11} + h_1 . \qquad e_{10} = d_{10} - h_1 .$

$h_8 = h_3 + \frac{1}{4} A A_{11} . \qquad h_9 = -3 h_3 + \frac{1}{4} A A_{10} . \qquad h_{10} = -(h_8 + h_9) .$

$e_{22} = d_{22} + h_1 \cdot D_{11} + h_8 . \qquad h_{11} = h_9 - h_8 .$

$e_{21} = d_{21} + h_1 \cdot (D_{10} - 2 D_{11}) + h_9 . \qquad h_{12} = -2 h_9 .$

$e_{20} = d_{20} + h_1 \cdot (D_{11} - D_{10}) + h_{10} .$

$h_{13} = + h_6 + h_5 \cdot 2 A_{11} + \frac{1}{4} A A_{22} + \frac{1}{8} A_{11}^2 .$

$h_{14} = -5 h_6 + h_5 (2 A_{10} - 4 A_{11}) + \frac{1}{4} A A_{21} + \frac{1}{8} A_{11}^2 + \frac{1}{4} A_{10} A_{11} .$

$h_{15} = +9 h_6 + h_5 (-6 A_{10}) + \frac{1}{4} A (A_{20} - A_{22}) + \frac{1}{8} A_{10}^2 .$

$h_{16} = -(h_{13} + h_{14} + h_{15}) .$

$e_{33} = d_{33} + h_1 D_{22} + h_8 D_{11} + h_{13} .$

$e_{32} = d_{32} + h_1 (D_{21} - 2 D_{22}) + h_{11} D_{11} + h_8 D_{10} + h_{14} .$

$e_{31} = d_{31} + h_1 (D_{20} - 2 D_{21} + D_{22}) + h_{12} D_{11} + h_9 D_{10} + h_{15} .$

$e_{30} = d_{30} + h_2 (D_{21} - D_{20}) + h_9 D_{11}^{*} + h_{10} D_{10} + h_{16} .$

$h_{17} = h_{14} - h_{13} . \qquad h_{18} = h_{15} - h_{17} . \qquad h_{19} = -h_{13} - 2 h_{15} .$

$h_{20} = \frac{1}{10\,321\,920} A^8 . \qquad h_{21} = \frac{1}{4} h_2 . \qquad h_{22} = \frac{1}{8} h_1 .$

$h_{23} = + h_{20} + h_{21} \cdot A_{11} + h_5 \cdot 2 A_{22} + h_{22} \cdot A_{11}^2 + \frac{1}{4} (A A_{33} + A_{11} A_{22}) .$

$h_{24} = -7 h_{20} + h_{21} (A_{10} - 4 A_{11}) + h_5 (2 A_{21} - 4 A_{22}) + h_{22} (2 A_{10} A_{11} - A_{11}^2) + \frac{1}{4} \{A A_{32} + A_{10} A_{22} + A_{11} (A_{21} + A_{22})\} .$

$h_{25} = +20 h_{20} + h_{21} \cdot 5 (A_{11} - A_{10}) + h_5 (2 A_{20} - 4 A_{21}) + h_{22} (A_{10}^2 - 4 A_{10} A_{11} - A_{11}^2) + \frac{1}{4} \{A (A_{31} - A_{33}) + A_{10} A_{21} + A_{11} (A_{20} + A_{21})\} .$

$h_{26} = -28 h_{20} + h_{21} (9 A_{10} - A_{11}) + h_5 (4 A_{22} - 6 A_{20}) + h_{22} (-3 A_{10}^2 - A_{11}^2) + \frac{1}{4} \{A (A_{30} - A_{32}) + A_{10} (A_{20} - A_{22}) - A_{11} A_{22}\} .$

$h_{27} = -(h_{23} + h_{24} + h_{25} + h_{26}) .$

$e_{44} = d_{44} + h_1 D_{33} + h_8 D_{22} + h_{13} D_{11} + h_{23} .$

$e_{43} = d_{43} + h_1 (D_{32} - 2 D_{33}) + h_{11} D_{22} + h_8 D_{21} + h_{17} D_{11} + h_{13} D_{10} + h_{24} .$

$e_{42} = d_{42} + h_1 (D_{31} - 2 D_{32} + D_{33}) + h_{12} D_{22} + h_{11} D_{21} + h_8 D_{20} + h_{18} D_{11} + h_{14} D_{10} + h_{25} .$

$e_{41} = d_{41} + h_1 (D_{30} - 2 D_{31} + D_{32}) + h_{11} D_{22} + h_{12} D_{21} + h_9 D_{20} + h_{19} D_{11} + h_{15} D_{10} + h_{26} .$

$e_{40} = d_{40} + h_1 (D_{31} - D_{30}) + h_8 D_{22} + h_9 D_{21} + h_{10} D_{20} + h_{15} D_{11} + h_{16} D_{10} + h_{27} .$

Tafel 3. Formeln für die durch (4), (5), (7), (8) erklärten $f_{n\nu}$

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} M^{2n+1} A_{n\nu} \sin(2\nu+1)\tau; \qquad y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} M^{2n+1} B_{n\nu} \cos(2\nu+1)\tau;$$

$$M = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} M^{2n+1} B_{n\nu}; \qquad \frac{dx}{d\tau}(\cos y - 1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} M^{2n+1} (2\nu+1) f_{n\nu} \cos(2\nu+1)\tau$$

$$f_{00} = 0. \qquad f_{11} = -\frac{1}{24} A. \qquad f_{10} = -\frac{3}{8} A.$$

$$H^1 = +B_{10} + \frac{1}{96}. \qquad H^2 = +B_{10} + \frac{5}{96}. \qquad H^3 = -2B_{10} + \frac{5}{48}.$$

$$f_{22} = \frac{1}{20}\left\{-\frac{3}{2} A_{11} + H^1 A\right\}.$$

$$f_{21} = \frac{1}{12}\left\{-3A_{11} - \frac{1}{2} A_{10} + H^2 A\right\}.$$

$$f_{20} = \frac{1}{4}\left\{-\frac{3}{2}(A_{11} + A_{10}) + H^3 A\right\}. \qquad H^4 = -2B_{10} + \frac{1}{16}.$$

$$H^5 = +B_{22} + \frac{1}{2} B_{10}^2 + \frac{1}{24} B_{10} + \frac{1}{11520}. \qquad H^6 = 2H^5 + H^7 - \frac{1}{720}.$$

$$H^7 = +B_{21} - \frac{3}{2} B_{10}^2 + \frac{1}{24} B_{10} + \frac{7}{3840}. \qquad H^8 = H^5 - 2H^6 + \frac{1}{240}.$$

$$f_{33} = \frac{1}{28}\left\{-\frac{5}{2} A_{22} + 3H^1 A_{11} - H^5 A\right\}.$$

$$f_{32} = \frac{1}{20}\left\{-5A_{22} - \frac{3}{2} A_{21} + \frac{1}{8} A_{11} + H^1 A_{10} - H^6 A\right\}.$$

$$f_{31} = \frac{1}{12}\left\{-\frac{5}{2} A_{22} - 3A_{21} - \frac{1}{2} A_{20} + 3H^4 A_{11} + H^2 A_{10} - H^7 A\right\}.$$

$$f_{30} = \frac{1}{4}\left\{-\frac{3}{2}(A_{20} + A_{21}) + 3H^2 A_{11} + H^3 A_{10} - H^8 A\right\}.$$

$$H^9 = H^5 - H^6. \qquad H^{10} = H^5 - \frac{1}{720}. \qquad H^{11} = H_5 + 2H^7 - \frac{1}{180}.$$

$$H^{12} = -B_{33} + B_{10} B_{22} + \frac{1}{24} B_{22} + \frac{1}{16} B_{10}^2 + \frac{1}{1920} B_{10} + \frac{1}{2580480}.$$

$$H^{13} = -2B_{33} - B_{32} + B_{10} B_{21} + \frac{1}{6} B_{22} + \frac{1}{24} B_{21} + \frac{1}{16} B_{10}^2 + \frac{1}{384} B_{10} + \frac{1}{286720}.$$

$$H^{14} = + B_{30} - B_{32} + B_{10}(B_{20} - 2B_{22}) + \frac{5}{24} B_{22} + \frac{1}{8} B_{21} - \frac{1}{4} B_{10}^2 + \frac{1}{240} B_{10} + \frac{1}{71680}.$$

$$H^{15} = \frac{1}{40320} + 2H^{12} - 2H^{13} + H^{14}. \qquad H^{16} = \frac{1}{10080} - (H^{12} + H^{13} + H^{14} + H^{15}).$$

$$f_{44} = \frac{1}{36}\left\{-\frac{7}{2} A_{33} + 5H^1 A_{22} - 3H^5 A_{11} + H^{12} A\right\}.$$

$$f_{43} = \frac{1}{28}\left\{-7A_{33} - \frac{5}{2} A_{32} + \frac{5}{24} A_{22} + 3H^1 A_{21} + 3H^9 A_{11} - H^5 A_{10} + H^{13} A\right\}.$$

$$f_{42} = \frac{1}{20}\left\{-\frac{7}{2} A_{33} - 5A_{32} - \frac{3}{2} A_{31} + 5H^4 A_{22} + \frac{1}{8} A_{21} + H^1 A_{20} + 3H^{10} A_{11} - H^6 A_{10} + H^{14} A\right\}.$$

$$f_{41} = \frac{1}{12}\left\{-\frac{5}{2} A_{32} - 3A_{31} - \frac{1}{2} A_{30} + \frac{5}{24} A_{22} + 3H^4 A_{21} + H^2 A_{20} + 3H^{11} A_{11} - H^7 A_{10} + H^{15} A\right\}.$$

$$f_{40} = \frac{1}{4}\left\{-\frac{3}{2}(A_{30} + A_{31}) + 5H^1 A_{22} + 3H^2 A_{21} + H^3 A_{20} - 3H^7 A_{11} - H^8 A_{10} + H^{16} A\right\}.$$

Tafel 4.

Die Potenzentwicklungskoeffizienten $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ und ω_μ für die Frequenz und die Amplituden der Teilschwingungen bei $a^2 = 0.62$, $b^2 = 0.56$, $h = 0.06$, $k = 221$.

Präzession		Nutation	
$\omega_0 = + 0.155192$		$\omega_0 = + 3.796830$	
$\omega_1 = + 0.026404$		$\omega_1 = - 0.883400$	
$\omega_2 = + 0.004126$		$\omega_2 = + 0.024720$	
$\omega_3 = + 0.000678$		$\omega_3 = - 0.005758$	
$\omega_4 = + 0.000160$		$\omega_4 = - 0.001311$	
$A_{00} = - 0.015626$	$B_{00} = + 1.000000$	$A_{00} = + 0.016513$	$B_{00} = + 1.000000$
$A_{10} = - 0.000136$	$B_{10} = - 0.050215$	$A_{10} = + 0.002452$	$B_{10} = + 0.019942$
$A_{20} = - 0.000153$	$B_{20} = - 0.008062$	$A_{20} = + 0.000613$	$B_{20} = + 0.003894$
$A_{30} = - 0.000043$	$B_{30} = - 0.000546$	$A_{30} = + 0.000179$	$B_{30} = + 0.000937$
$A_{40} = - 0.000018$	$B_{40} = + 0.000275$	$A_{40} = + 0.000057$	$B_{40} = + 0.000256$
$A_{11} = - 0.000592$	$B_{11} = + 0.050215$	$A_{11} = - 0.000326$	$B_{11} = - 0.019942$
$A_{21} = - 0.000113$	$B_{21} = + 0.002284$	$A_{21} = - 0.000074$	$B_{21} = - 0.004614$
$A_{31} = - 0.000018$	$B_{31} = - 0.001117$	$A_{31} = - 0.000018$	$B_{31} = - 0.001181$
$A_{41} = - 0.0000005$	$B_{41} = - 0.000428$	$A_{41} = - 0.000005$	$B_{41} = - 0.000331$
$A_{22} = - 0.000055$	$B_{22} = + 0.005778$	$A_{22} = + 0.000012$	$B_{22} = + 0.000720$
$A_{32} = - 0.000017$	$B_{32} = + 0.000804$	$A_{32} = + 0.000004$	$B_{32} = + 0.000274$
$A_{42} = - 0.000003$	$B_{42} = - 0.000200$	$A_{42} = + 0.000001$	$B_{42} = + 0.000090$
$A_{33} = - 0.0000059$	$B_{33} = + 0.000859$	$A_{33} = - 0.0000005$	$B_{33} = - 0.000031$
$A_{43} = - 0.0000028$	$B_{43} = + 0.000202$	$A_{43} = - 0.0000003$	$B_{43} = - 0.000017$
$A_{44} = - 0.0000005$	$B_{44} = + 0.000150$	$A_{44} = + 0.0000000$	$B_{44} = + 0.0000015$

Tafel 5.

Frequenz und Teilamplituden für die Schwingungsweite $M = 60°$ bei $a^2 = 0.62$, $b^2 = 0.56$, $h = 0.06$, $k = 221$.

Präzession		Nutation	
$\omega = 0.1902\ \text{sek}^{-1}$		$\omega = 2.85\ \text{sek}^{-1}$	
$T = 2\pi/\omega = 33.0$ sek		$T = 2\pi/\omega = 2.21$ sek	
$A_0 = - 0.01604$	$MA_0 = - 0.96°$	$A_0 = + 0.02026$	$MA_0 = + 1.22°$
$A_1 = - 0.00081$	$MA_1 = - 0.05°$	$A_1 = - 0.00048$	$MA_1 = - 0.03°$
$A_2 = - 0.00009$	$MA_2 = - 0.01°$	$A_2 = + 0.00002$	$MA_2 = + 0.00°$
$A_3 = - 0.00001$	$MA_3 = - 0.00°$	$A_3 = - 0.00000$	$MA_3 = - 0.00°$
$A_4 = - 0.00000$	$MA_4 = - 0.00°$	$A_4 = + 0.00000$	$MA_4 = + 0.00°$
$B_0 = + 0.9349$	$MB_0 = + 56.1°$	$B_0 = + 1.0282$	$MB_0 = + 61.7°$
$B_1 = + 0.0557$	$MB_1 = + 3.3°$	$B_1 = - 0.0295$	$MB_1 = - 1.8°$
$B_2 = + 0.0077$	$MB_2 = + 0.5°$	$B_2 = + 0.0014$	$MB_2 = + 0.1°$
$B_3 = + 0.0014$	$MB_3 = + 0.1°$	$B_3 = - 0.0001$	$MB_3 = - 0.0°$
$B_4 = + 0.0002$	$MB_4 = + 0.0°$	$B_4 = + 0.0000$	$MB_4 = + 0.0°$

für dieselbe Schwingungsweite $y_{\max} = M = 60°$ erhalten würde, führt zu folgenden Ergebnissen:

Die Frequenz der reinperiodischen Lösung ist bei der Präzession in Wirklichkeit um 22.6 v. H. größer, bei der Nutation um 25.0 v. H. geringer als nach der linearen Theorie; man hätte dort die Umdrehungszahl des Kreisels, mithin die Größen h und k nur mit 79.9 v. H. bzw. 72.6 v. H. ihres tatsächlichen Wertes einsetzen dürfen, um bei gleichen Werten der Konstanten a, b die Frequenz richtig zu erhalten. — Der Schlingerwinkel des Schiffes $x_{\max}$ ist mit 0.92° bzw. 1.25° um 2.0 v. H. geringer bzw. um 25.7 v. H. größer, als die lineare Theorie ergibt; das ist freilich bei der Kleinheit dieses Winkels belanglos. — Die Beschleunigung der Kreiselschwingung im Umkehrpunkt, $-\ddot{y}(0)$, ist nach I (9.1) bei der Präzession 2.59 mal, bei der Nutation 0.45 mal so groß wie der Wert, den der lineare Ansatz liefert; der Umkehrruck beansprucht das Schiff also weit stärker, als die lineare Rechnung erwarten läßt.

Z. angew. Math. Mech. Bd. 22 Nr. 1 Febr. 1942

Beiträge zu den Interpolationsverfahren der numerischen Integration von Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung.

Von *Lothar Collatz* in Karlsruhe und *Rudolf Zurmühl* in Darmstadt.

Aus bekannten Abwandlungen des Adams-Verfahrens werden zwei Interpolationsformeln für Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung ausgewählt, welche sich durch Einfachheit und Genauigkeit auszeichnen. Für diese Formeln, von denen die für Gleichungen 1. Ordnung mit der Simpsonschen Regel übereinstimmt, werden Fragen der Handhabung, der Schrittbemessung und der Fehlerfortpflanzung besprochen.

Für die numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen haben die nach Adams[1]) und Störmer[2]) benannten Verfahren[3]) in steigendem Maße Eingang gefunden, wobei in neuerer Zeit die Interpolationsverfahren in den Vordergrund getreten sind, welche durch iterative Verbesserung die Genauigkeit der Näherung wesentlich steigern. Im folgenden greifen wir aus den verschiedenen im Schrifttum bekannt gewordenen Abwandlungen[4]) zwei Interpolationsformeln für Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung heraus, welche die ersten Glieder der ein- bzw. zweimal integrierten Stirlingschen Interpolationsformel benutzen und der Form nach an Verfahren von Nyström und Störmer anknüpfen. Die Formeln sind nicht neu, doch bisher zu numerischen Rechnungen anscheinend nur wenig herangezogen worden, obgleich sie einfache Handhabung mit guter Genauigkeit verbinden. Für diese Formeln werden Fragen der Handhabung und der Fehlerfortpflanzung untersucht[5]).

Teil I (Differentialgleichungen 1. Ordnung) behandelt zunächst Handhabung der Interpolationsformel, stufenweisen Aufbau der Ausgangswerte, Bemessung und Abstufung der Schrittweite, Beschleunigung der Konvergenz und andere praktische Fragen. Auf die Fehlerabschätzung braucht hier nur kurz eingegangen zu werden, da diese für Differentialgleichungen 1. Ordnung mehrfach durchgeführt worden ist[6]). Es wird nur das Ergebnis mitgeteilt, welches für das hier beschriebene Verfahren günstiger ausfällt als für die Adamssche Interpolationsformel.

Teil II (Differentialgleichungen 2. Ordnung) geht nach Darstellung des Verfahrens und der Anfangsiteration ausführlicher auf die Fehlerfortpflanzung ein. Soweit die Gedankengänge denen der Arbeit von G. Schulz[7]) ähnlich verlaufen, können sie hier kurzgefaßt werden. Die dortigen Ergebnisse werden dahin ergänzt, daß auch die Fehler der Anfangswerte abgeschätzt, die Interpolationsformel anstatt der Störmerschen Extrapolationsformel zugrunde gelegt und in der Differentialgleichung $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y})$ eine Abhängigkeit der Funktion f auch von $\dot{y}$ zugelassen wird.

I. Verfahren für Differentialgleichungen 1. Ordnung.

1. Näherungsaufbau nach einer Interpolationsformel.

Zu einer Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{y} = f(t, y) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1.1),$$

[1]) F. Bashforth, J. C. Adams: An attempt to the test the theories of capillary action. Cambridge 1883, S. 15 bis 21.

[2]) C. Störmer: Sur les trajectoires des corpuscules électrisés dans l'espace sous l'action du magnétisme terrestre avec application aux aurores boréales. Arch. Sci. phys. nat. Bd. 24 (1907), S. 221 bis 247.

[3]) Vgl. etwa Günther Schulz: Formelsammlung zur praktischen Mathematik. Sammlung Göschen Bd. 1110. Berlin und Leipzig 1937, S. 116 bis 126.

[4]) E. J. Nyström: Über die numerische Integration von Differentialgleichungen. Acta Soc. Sci. fennicae Bd. 50 (1925), Nr. 13, S. 29 bis 43. — A. Bennet, W. E. Milne, H. Bateman: Numerical integration of differential equations. Bull. nat. Res. Counc. Nr. 92. Wash. 1933, S. 28, 71 bis 87. — W. E. Milne: Americ. Math. Monthly Bd. 33 (1926), S. 455 bis 460 und Bd. 40 (1933), S. 322 bis 327. — E. Lindelöf: Remarques sur l'intégration numérique des équations différentielles ordinaires. Acta Soc. Sci. fennicae A Bd. 2 (1938), Nr. 13. — Sch. Mikeladze: Über die Integration von Differentialgleichungen mit Hilfe der Differenzenmethode. Bull. Acad. Sci. USSR, Ser. Math. Nr. 5 bis 6 (1939), S. 627 bis 642 (Russisch).

[5]) Die Arbeit entstand im Anschluß an größere numerische Rechnungen, welche am Institut für Praktische Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt durchgeführt wurden.

[6]) R. v. Mises: Zur numerischen Integration von Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 10 (1930), S. 81 bis 92. — G. Schulz: Interpolationsverfahren zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 12 (1932), S. 44 bis 59. — W. Tollmien: Über die Fehlerabschätzung beim Adamsschen Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938), S. 83 bis 90.

[7]) G. Schulz: Fehlerabschätzung für das Störmersche Integrationsverfahren. Z. angew. Math. Mech. Bd. 14 (1934), S. 224 bis 234.

welche der Lipschitzbedingung

$$|f(t, y) - f(t, y^*)| \leq M\,|y - y^*| \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1.2)$$

genügt (wobei M durch den größten Betrag der Ableitung $\varkappa = \frac{\partial f}{\partial y}$ innerhalb des in Betracht kommenden Bereiches ersetzbar ist), seien bereits eine Anzahl von Näherungswerten y_i an den gleichabständigen Stellen t_i mit der Spanne $V t = h$ und damit auch die Ableitungen $\dot{y}_i = f(t_i, y_i) = f_i$ $(i = \cdots n-2, n-1, n)$ bekannt.

Zur Neurechnung einer Näherung y_{n+1} für den exakten Wert $y(t_{n+1})$ bedienen wir uns der Gleichung

$$y_{n+1} = y_{n-1} + h\left(2 f_n + \frac{1}{3} V^2 f_{n+1}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1.3),$$

welche die ersten Glieder der integrierten Stirlingschen Interpolationsformel[8])

$$y_{n+1} = y_{n-1} + h\left(2 f_n + \frac{1}{3} V^2 f_{n+1} - \frac{1}{90} V^4 f_{n+2} + \frac{1}{756} V^6 f_{n+3} - + \cdots\right) \quad \ldots \quad (1.4)$$

benutzt und mit der Simpsonschen Regel

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n-1} + 4 f_n + f_{n+1})$$

übereinstimmt. Dabei bedeuten die V aufsteigende Differenzen, also $V f_n = f_n - f_{n-1}$. Im Differenzenchema, Tafel 1, in welchem zweckmäßig die mit h multiplizierten Funktionswerte und deren Differenzen tabuliert werden, benutzt man die umrandeten Werte, versehen mit den am Kopf des Schemas vermerkten Faktoren 2 und 1/3.

Tafel 1. Rechenschema zur Interpolationsformel (1.3).

t		$\cdot 2$		$\cdot \frac{1}{3}$
	y	$h\dot{y} = hf$	hVf	$hV^2 f$
⋮	⋮	⋮		
t_{n-2}	y_{n-2}	hf_{n-2}	⋮	
			hVf_{n-1}	⋮
t_{n-1}	**y_{n-1}**	hf_{n-1}		$hV^2 f_n$
			hVf_n	
t_n	y_n	**hf_n**		**$hV^2 f_{n+1}$**
			hVf_{n+1}	
t_{n+1}	**y_{n+1}**	hf_{n+1}		

In (1.3) ist zunächst die zweite Differenz $V^2 f_{n+1}$ der neuen Zeile $n+1$ noch nicht bekannt. Sie läßt sich jedoch, wenn das Verfahren erst einmal in Gang gekommen ist, aus der Reihe der bisher bekannten $V^2 f$-Werte durch Extrapolation leicht schätzen[9]) (etwa durch Aufzeichnen der $V^2 f$ oder der $V^3 f$ über t). Ausgehend von einem so geschätzten $V^2 f_{n+1}^{(0)}$ erhält man die gesuchte Näherung in fortschreitender Verbesserung nach der Iterationsvorschrift

[8]) Vgl. etwa G. Schulz: Formelsammlung[3]), S. 86.

[9]) Hat man keinen Anhaltspunkt zum Schätzen des neuen Wertes $V^2 f_{n+1}$, so kann man statt dessen den Wert $(V^2 f_n + V^3 f_n)$ benutzen. Die Formel geht dann in die nach $V^3 f_n$ abgebrochene Extrapolationsformel von Nyström über. Vgl. E. J. Nyström, a. a. O.[4]), S. 32 bis 33, Gl. (41).

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1}^{(\nu+1)} &= y_{n-1} + h\left(2 f_n + \frac{1}{3} \nabla^2 f_{n+1}^{(\nu)}\right) \\ \text{mit} \quad f_{n+1}^{(\nu)} &= f(t_{n+1}, y_{n+1}^{(\nu)}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.5).$$

Die Iteration kommt bei genügend kleiner Schrittweite h nach ein bis zwei Durchrechnungen zum Stehen.

2. Iterative Bestimmung der Ausgangswerte.

Zur Ermittlung der zum Beginn der Rechnung erforderlichen Ausgangswerte bedient man sich mit Vorteil eines stufenweisen Aufbaus von Rohwerten mit anschließender iterativer Verbesserung, etwa nach folgendem Schema[10]):

A. Aufbau von Rohwerten:

1. Vorläufige Rohwerte auf Zeile 1:

$(y_1) = y_0 + h f_0$; daraus:

$(f_1) = f[t_1, (y_1)]$, $(\nabla f_1) = (f_1) - f_0$.

2. Verbesserte Rohwerte auf Zeile 1:

$$y_1^{(0)} = y_0 + h\left[f_0 + \frac{1}{2}(\nabla f_1)\right]; \text{ daraus: } f_1^{(0)},\ \nabla f_1^{(0)}.$$

3. Rohwerte auf Zeile 2:

$$y_2^{(0)} = y_0 + 2 h f_1^{(0)}; \text{ daraus: } f_2^{(0)},\ \nabla f_2^{(0)},\ \nabla^2 f_2^{(0)}.$$

4. Verbesserte Rohwerte auf Zeile 1 und 2:

$$y_1^{(1)} = y_0 + h\left(f_0 + \frac{1}{2}\nabla f_1^{(0)} - \frac{1}{12}\nabla^2 f_2^{(0)}\right),$$

$$y_2^{(1)} = y_0 + h\left(2 f_1^{(0)} \qquad + \frac{1}{3}\nabla^2 f_2^{(0)}\right);$$

daraus: $f_1^{(1)}$, $f_2^{(1)}$, $\nabla f_1^{(1)}$, $\nabla f_2^{(1)}$, $\nabla^2 f_2^{(1)}$.

5. Rohwerte auf Zeile 3:

$$y_3^{(1)} = y_1^{(1)} + h\left(2 f_2^{(1)} + \frac{1}{3}\nabla^2 f_2^{(1)}\right);$$

daraus: $f_3^{(1)}$, $\nabla f_3^{(1)}$, $\nabla^2 f_3^{(1)}$, $\nabla^3 f_3^{(1)}$.

Ausgehend von diesen Werten der Näherungsstufe $\nu = 1$ folgt nun:

B. Iterative Verbesserung:

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(\nu+1)} &= y_0 &&+ h\left(f_0 + \frac{1}{2}\nabla f_1^{(\nu)} - \frac{1}{12}\nabla^2 f_2^{(\nu)} + \frac{1}{24}\nabla^3 f_3^{(\nu)}\right) \\ y_2^{(\nu+1)} &= y_0 &&+ h\left(2 f_1^{(\nu)} \qquad + \frac{1}{3}\nabla^2 f_2^{(\nu)}\right) \\ y_3^{(\nu+1)} &= y_1^{(\nu+1)} &&+ h\left(2 f_2^{(\nu)} \qquad + \frac{1}{3}\nabla^2 f_3^{(\nu)}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1.6).$$

Dabei wechseln ab:

1. Verbessern der drei y-Werte nach (1.6),
2. Verbessern der Funktionswerte $f_i^{(\nu)} = f(t_i, y_i^{(\nu)})$ und der Differenzen,

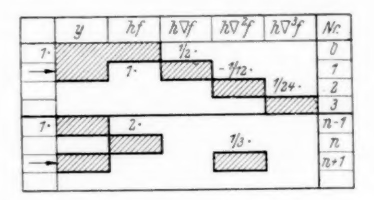
bis sich die Werte innerhalb der mitgeführten Stellenzahl nicht mehr ändern. — Für geringere Genauigkeitsansprüche und genügend kleine Schrittweite genügt die Anfangsiteration mit zwei

[10]) Zur Berechnung von y_1 vgl. G. Schulz: Formelsammlung[3]), S. 87; y_2 und y_3 werden im wesentlichen nach Formel (1.3) bestimmt.

Werten y_1 und y_2, also eine Rechnung innerhalb der gestrichelten Umrandung. Auf A 3 folgt dann unmittelbar die iterative Verbesserung nach B.

Die Anfangsiteration kann durch Schablonen nach Art von Tafel 2 erleichtert werden[11]), wobei die im Differenzenschema zu verwendenden Werte in (hier schraffiert gezeichneten) Schablonenfenstern, versehen mit den zugehörigen Faktoren, sichtbar werden. Der obere Teil der Schablone dient lediglich zur Anfangsrechnung von y_1; der untere dagegen außer zur Anfangsberechnung von y_2 und y_3 auch zur fortlaufenden Rechnung nach Gl. (1.3).

Tafel 2. Schablone zur Berechnung der Ausgangswerte nach (1.6) und zur fortlaufenden Rechnung nach (1.3).



3. Bemessung der Schrittgröße.

Die Schrittgröße h ist so klein zu halten, daß

1. die Iteration nach (1.3) genügend rasch konvergiert, und daß
2. das in der ausführlicheren Stirlingformel (1.4) auf $\nabla^2 f$ folgende Glied $-\frac{h}{90}\nabla^4 f_{n+2}$ auf die Näherung y_{n+1} möglichst ohne Einfluß bleibt.

Maßgebend für die Bemessung der Schrittweite ist die im folgenden als „Schrittkennzahl" bezeichnete Größe

$$k = |\varkappa h| \quad \text{mit} \quad \varkappa = \frac{\partial f}{\partial y}$$

(vgl. **6.** und **7.**). Sie soll für mittlere Genauigkeitsansprüche den Wert von etwa $k = 0{,}05 \ldots 0{,}10$ einhalten, wobei sich für die Anfangsiteration mit Rücksicht auf rasche Konvergenz eher der kleinere Wert empfiehlt. Bei veränderlichem $\varkappa$ ist der Schritt h entsprechend abzustufen.

Zur Schrittverdopplung brauchen die Werte y_i und die mit doppelter Spanne $\bar{h} = 2h$ versehenen Werte $f_i \bar{h}$ der Zeilen $n-4$, $n-2$ und n lediglich noch einmal angeschrieben und die $f_i \bar{h}$ mit neuen Differenzen versehen zu werden, worauf die Rechnung ihren Fortgang nimmt.

Zur Schritthalbierung ist eine neue Anfangsiteration erforderlich. Von der zuletzt berechneten n-ten Zeile aus kann man zwei Funktionswerte der Zeilen $n - {}^1\!/_2$ und $n + {}^1\!/_2$ zwischenschalten nach

$$h f_{n-1/2} = h\left(f_n - \frac{1}{2}\nabla f_n - \frac{1}{8}\nabla^2 f_n - \frac{1}{16}\nabla^3 f_n\right),$$

$$h f_{n+1/2} = h\left(f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n + \frac{3}{8}\nabla^2 f_n + \frac{5}{16}\nabla^3 f_n\right).$$

Die mit halber Spanne $\bar{h} = h/2$ versehenen Werte $\bar{h} f_i$ ($i = n-1$, $n - {}^1\!/_2$, n, $n + {}^1\!/_2$ oder neu $i = 0, 1, 2, 3$) mit ihren Differenzen dienen von y_0 aus zur Berechnung von y_1, y_2, y_3 gemäß (1.6) mit anschließender iterativer Verbesserung der Werte.

4. Ein Beispiel.

Als Beispiel zur Anfangsiteration wählen wir die Differentialgleichung $\dot{y} = t + y$ mit der Anfangsbedingung $y = 0$ für $t = 0$. Die Schrittgröße sei $h = 0{,}1$, die Schrittkennzahl ist damit $k = |\varkappa h| = 0{,}1$, also — namentlich für die Anfangsiteration — reichlich bemessen. Nach

Tafel 3. Stufenweiser Aufbau dreier Rohwerte $y_1^{(1)}$, $y_2^{(1)}$, $y_3^{(1)}$.

Nach	t	y	$hf = 0{,}1\,(t+y)$	$h\nabla f$	$h\nabla^2 f$	$h\nabla^3 f$
	0,0	0	0			
A 1)	0,1	0	0,010 0000	10 0000		
	0,0	0	0			
A 2)	0,1	0,005 000	0,010 5000	10 5000		
A 3)	0,2	0,021 000	0,022 1000	11 6000	1 1000	
	0,0	0	0			
A 4)	0,1	0,005 158	0,010 5158	10 5158		
A 4)	0,2	0,021 367	0,022 1367	11 6209	1 1051	
A 5)	0,3	0,049 800	0,034 9800	12 8433	1 2224	1173

[11]) Die Differenzen sind hier, ähnlich wie im Zahlenbeispiel Tafel 3 und 4, nicht auf Lücke geschrieben, sondern je um eine halbe Zeile gesenkt.

Aufbau der Rohwerte in Tafel 3 nach den Gleichungen unter **2 A** erfolgt die iterative Verbesserung nach (1.6) in Tafel 4. Bei Anwendung der Schablone Tafel 2 würden die einzelnen

Tafel 4. Iteration der Ausgangswerte y_1, y_2, y_3 nach Gl. (1.6).

ν	t	y	$hf = 0.1\,(t + y)$	$h\nabla f$	$h\nabla^2 f$	$h\nabla^3 f$
2	0,0	0	0			
	0,1	0,005 170	0,010 5170	10 5170		
	0,2	0,021 400	22 1400	11 6230	1 1060	
	0,3	0,049 851	34 9851	12 8451	1 2221	1161
3	0,0	0	0			
	0,1	0,005 171	0,010 5171	10 5171		
	0,2	0,021 403	22 1403	11 6232	1 1061	
	0,3	0,049 858	34 9858	12 8455	1 2223	1162
4	0,0	0	0			
	0,1	0,005 171	0,010 5171	10 5171		
	0,2	0,021 403	22 1403	11 6232	1 1061	
	0,3	0,049 859	34 9859	12 8456	1 2224	1163

Näherungsstufen nicht untereinander geschrieben, sondern (mit Bleistift) einkorrigiert werden, bis die Werte feststehen. Bei halber Schrittweite $h = 0{,}05$ verläuft die Iteration entsprechend rascher.

5. Glätten bei Kurvenaufrauhung.

Indem die Formel (1.3) bei der Berechnung von y_{n+1} unter Umgehen von y_n auf y_{n-1} zurückgreift, besteht eine unmittelbare Bindung von einem y-Wert nur zum zweitfolgenden, während ein Zusammenhang zwischen benachbarten y-Werten nur mittelbar über die Differentialgleichung hergestellt wird. Das kann — z. B. durch gewisse Unebenheiten bei empirischen Funktionsgesetzen — dazu führen, daß sich im Verlaufe der Rechnung der Näherungsverlauf in zwei getrennte Kurvenzüge nach Art von Bild 1 aufspaltet. Die Aufrauhung der y-Werte pflanzt sich über die Differentialgleichung auf die Funktionswerte f und damit — verstärkt — auf die Differenzen fort, bei denen sie sich in einem Schwanken etwa der $\nabla^2 f$-Werte zuerst bemerkbar macht.

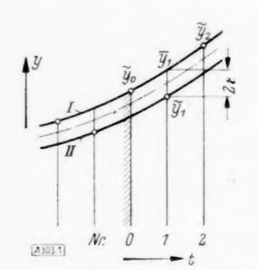


Bild 1. Aufgerauhte y-Kurve.

In diesem Falle kann man die aufgespaltenen y-Kurven durch Einschalten einer Anfangsiteration wieder aneinander binden. Man rechnet zunächst, ausgehend von einem Wert $\tilde{y}_0$, welcher um drei Schritte hinter dem letzten bekannten Wert ($\tilde{y}_3$) zurückliegt,

$$\bar{y}_1 = \tilde{y}_0 + h\left(f_0 + \frac{1}{2}\nabla f_1 - \frac{1}{12}\nabla^2 f_2 + \frac{1}{24}\nabla^3 f_3\right)$$

und erhält mit $2\varepsilon = \bar{y}_1 - \tilde{y}_1$ geglättete y-Werte auf einem mittleren (strichpunktierten) Kurvenzug nach

$$y_0 = \tilde{y}_0 - \varepsilon, \quad y_1 = \tilde{y}_1 + \varepsilon, \quad y_2 = \tilde{y}_2 - \varepsilon, \quad y_3 = \tilde{y}_3 + \varepsilon,$$

vgl. Bild 1. Nach Verbessern von Funktionswerten und Differenzen erfolgt Anfangsiteration nach (1.6), bis die Werte feststehen. Die Rechnung nimmt ihren Fortgang, bis eine erneut auftretende Aufrauhung eine Glättung notwendig macht.

6. Konvergenzbeschleunigung.

Will man die Schrittweite h nicht so klein halten, daß die Iteration nach (1.5) von selbst genügend rasch konvergiert, so kann die Konvergenz durch eine besondere Rechnung beschleunigt werden. Man erhält für die Unterschiede

$$\varepsilon_{n+1}^{(\nu)} = y_{n+1} - y_{n+1}^{(\nu)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1.7)$$

der ν. Näherungsstufe gegenüber der endgültigen Näherung durch Taylorentwicklung des Funktionswertes $f_{n+1}^{(\nu)}$ von f_{n+1} aus die Näherung

$$\varepsilon_{n+1}^{(\nu+1)} \approx \frac{1}{3}\,\varkappa\,h\,\varepsilon_{n+1}^{(\nu)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1.8).$$

Die Iteration nach (1.5) konvergiert also, solange $k = |\varkappa h| < 3$, und zwar um so rascher, je kleiner die Schrittkennzahl k ist.

Schreibt man nun (1.8) für ν und $\nu - 1$ an und subtrahiert, so erhält man nach kurzer Umrechnung

$$\varepsilon_{n+1}^{(\nu)} \approx \frac{y_{n+1}^{(\nu+1)} - y_{n+1}^{(\nu)}}{1 - \frac{1}{3}\varkappa h} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1.9),$$

womit aus dem Unterschied zweier aufeinander folgender Näherungsstufen die Korrektur $\varepsilon_{n+1}^{(\nu)}$ und damit nach (1.7) die gesuchte Näherung y_{n+1} berechnet werden kann.

Für Systeme von Differentialgleichungen tritt an die Stelle der einen Gl. (1.9) ein Gleichungssystem, welches hier nicht angeschrieben werden soll. Vielmehr sei auf den praktisch oft wichtigeren Fall hingewiesen, daß nur eine einzige Veränderliche des Systems schlecht konvergiert. Um nun nicht wegen dieser Veränderlichen den Schritt verkleinern zu müssen, kann man für sie die oben beschriebene Konvergenzbeschleunigung nach (1.9) und (1.7) anwenden.

Für die Anfangsiteration nach (1.6) ergibt sich in ähnlicher Rechnung wie oben ein Gleichungssystem für die Korrekturen $\varepsilon_i^{(\nu)} = y_i - y_i^{(\nu)}$. Für die verkürzte Anfangsiteration nach (1.6) innerhalb der gestrichelten Umrandung lauten die Gleichungen:

$$\left(1 - \frac{2}{3}\varkappa h\right)\varepsilon_1^{(\nu)} + \frac{1}{12}\varkappa h\,\varepsilon_2^{(\nu)} = y_1^{(\nu+1)} - y_1^{(\nu)}$$

$$-\frac{4}{3}\varkappa h\,\varepsilon_1^{(\nu)} + \left(1 - \frac{1}{3}\varkappa h\right)\varepsilon_2^{(\nu)} = y_2^{(\nu+1)} - y_2^{(\nu)}.$$

7. Fehlerabschätzung zum Interpolationsverfahren nach (1.3).

Für das Interpolationsverfahren nach Adams sind Fehlerabschätzungen schon wiederholt durchgeführt worden. Auch für die Formel (1.3) erhält man wie bei G. Schulz[6]) für den Fehler $\varepsilon_n = y_n - y(t_n)$ eine Schranke von der Gestalt

$$|\varepsilon_n| \leq C_1 + C_2 z^n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1.10),$$

wobei C_1 und C_2 von der Schrittanzahl n unabhängige Konstanten sind und z von der Schrittkennzahl $k = |\varkappa h|$ abhängt. An die Stelle der für das Adams-Verfahren beim Näherungsgrad $r = 3$ (Berücksichtigung der Glieder bis $\nabla^3 f$ einschließlich) geltenden Formel

$$k = \frac{24\,(z^3 - z^2)}{9\,z^3 + 19\,z^2 + 5\,z + 1}$$

tritt hier die Gleichung

$$k = \frac{3\,(z^2 - 1)}{z^2 + 4\,z + 1} \quad \ldots \ldots \quad (1.11).$$

Bild 2 zeigt die Abhängigkeit der Größe z von k für die Adamssche Interpolationsformel und für Formel (1.3). Die für das Anwachsen der Fehlerschranke (1.10) entscheidende Größe z fällt bei gleichem k für die Formel (1.3) kleiner, also günstiger aus. Für kleine Werte von $k = |\varkappa h|$ gilt für (1.11) angenähert

$$z \approx 1 + |\varkappa h|,$$

womit die Schrittkennzahl k einen gewissen Anhalt für das Anwachsen der Fehler gibt.

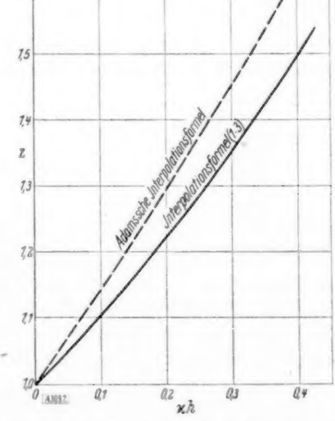


Bild 2. Größe z in Abhängigkeit von $\varkappa h$.

II. Verfahren für Differentialgleichungen 2. Ordnung.

8. Interpolationsformel zum Störmer-Verfahren.

Bei der Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{y} = f(t, y, \dot{y}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2.1)$$

gehorche f der Lipschitzbedingung

$$|f(t, y, \dot{y}) - f(t, y^*, \dot{y}^*)| \leq M\,|y - y^*| + L\,|\dot{y} - \dot{y}^*| \quad \ldots \ldots \quad (2.2).$$

wobei M und L durch die größten Beträge der Ableitungen f_y und $f_{\dot y}$ innerhalb des in Betracht kommenden Bereiches ersetzbar sind. Aufbauend auf einer Reihe bereits bekannter Näherungswerte y_i und $\dot y_i$ und damit bekannter Funktionswerte $\ddot y_i = f(t_i, y_i, \dot y_i) = f_i$ an gleichabständigen Stellen t_i $(i = \cdots n-2, n-1, n)$ berechnen wir neue Näherungen y_{n+1} und $\dot y_{n+1}$ nach den Formeln

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1} &= 2\,y_n - y_{n-1} + h^2\left(\ \ f_n + \frac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1}\right) \\ h\,\dot y_{n+1} &= h\,\dot y_{n-1} \qquad\quad + h^2\left(2 f_n + \frac{1}{3}\nabla^2 f_{n+1}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2.3).$$

Die zweite der beiden Gleichungen ist Formel (1.3), angewandt auf $h\,\dot y$, die erste benutzt die Anfangsglieder der zweimal integrierten Stirlingformel[12])

$$y_{n+1} = 2\,y_n - y_{n-1} + h^2\left(f_n + \frac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1} - \frac{1}{240}\nabla^4 f_{n+2} + \frac{31}{60480}\nabla^6 f_{n+3} - + \cdots\right) \quad \ldots \quad (2.4).$$

Die praktische Anordnung der Rechnung ist aus dem Schema Tafel 5 ersichtlich, in welchem die umrandeten Werte, versehen mit den Faktoren 1 und $^1/_{12}$ bzw. 2 und $^1/_3$, benutzt werden.

Tafel 5. Rechenschema zur Interpolationsformel (2.3).

t	Faktoren für y:		1		1/12
	Faktoren für $h\dot y$:		2		1/3
	y	$h\dot y$	$h^2\ddot y = h^2 f$	$h^2\nabla f$	$h^2\nabla^2 f$
⋮	⋮	⋮	⋮		
t_{n-2}	y_{n-2}	$\dot y_{n-2}$	$h^2 f_{n-2}$	⋮	
				$h^2\nabla f_{n-1}$	⋮
t_{n-1}	y_{n-1}	$h\dot y_{n-1}$	$h^2 f_{n-1}$		$h^2\nabla^2 f_n$
				$h^2\nabla f_n$	
t_n	y_n	$h\dot y_n$	$h^2 f_n$		$h^2\nabla^2 f_{n+1}$
				$h^2\nabla f_{n+1}$	
t_{n+1}	y_{n+1}	$h\dot y_{n+1}$	$h^2 f_{n+1}$		

Zur Neurechnung der Näherungen y_{n+1} und $h\,y_{n+1}$ kann der noch unbekannte Wert $\nabla^2 f_{n+1}$ wieder aus der Reihe der schon bekannten $\nabla^2 f$-Werte durch Extrapolation geschätzt werden[13]). Ausgehend von dem geschätzten Wert $\nabla^2 f_{n+1}^{(0)}$ liefern die Gln. (2.3) die gesuchten Näherungen in iterativer Verbesserung nach

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1}^{(\nu+1)} &= 2\,y_n - y_{n-1} + h^2\left(\ \ f_n + \frac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1}^{(\nu)}\right) \\ h\,\dot y_{n+1}^{(\nu+1)} &= h\,\dot y_{n-1} \qquad\quad + h^2\left(2 f_n + \frac{1}{3}\nabla^2 f_{n+1}^{(\nu)}\right) \\ \text{mit} \qquad f_{n+1}^{(\nu)} &= f\left(t_{n+1},\ y_{n+1}^{(\nu)},\ \dot y_{n+1}^{(\nu)}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2.5).$$

Für den in den Anwendungen wichtigen Sonderfall fehlender Abhängigkeit der Differentialgleichung von $\dot y$, also für $\ddot y = f(t, y)$, brauchen die $h\,\dot y$-Werte nicht berechnet, oder, wenn ihre Kenntnis erwünscht, nicht mit iteriert zu werden.

Für die Bemessung der Schrittgröße h sind wiederum einerseits genügend rasche Konvergenz der Iterationen, andererseits die in den Gl. (2.4) und (1.4) auf $\nabla^2 f$ folgenden Glieder $-\frac{1}{240}h^2\nabla^4 f_{n+2}$ und $-\frac{1}{90}h^2\nabla^4 f_{n+2}$ maßgebend, welche auf die Näherungen y_{n+1} und $h\,\dot y_{n+1}$ möglichst ohne Einfluß bleiben sollen. Über eine die Schrittweite bestimmende Schrittkennzahl k (ähnlich wie in **3**) siehe in **13**, letzter Absatz.

9. Iterative Bestimmung der Ausgangswerte.

Die Ermittlung der zum Beginn der Rechnung erforderlichen Ausgangswerte kann ähnlich wie unter I in stufenweisem Aufbau von Rohwerten mit anschließender iterativer Verbesserung erfolgen. Im Falle fehlender Abhängigkeit der Differentialgleichung von $\dot y$, also für $\ddot y = f(t, y)$, erübrigen sich Rohwerte und Iterationen für $\dot y$.

[12]) Vgl. G. Schulz: Formelsammlung [3]), S. 88.

[13]) Nimmt man anstatt $\nabla^2 f_{n+1}$ den Wert $(\nabla^2 f_n + \nabla^3 f_n)$, so hat man die nach $\nabla^3 f_n$ abgebrochenen Extrapolationsformeln von Störmer [2]) und Nyström [9]).

A. **Aufbau dreier Rohwerte:**

1. Vorläufige Rohwerte auf Zeile 1:

$$(y_1) = y_0 + h\,\dot y_0 + \frac{1}{2}h^2 f_0,$$

$$h\,(\dot y_1) = h\,\dot y_0 \qquad + \quad h^2 f_0; \quad \text{daraus:}$$

$$(f_1) = f\,[t_1, (y_1), (\dot y_1)], \qquad (\nabla f_1) = (f_1) - f_0.$$

2. Verbesserte Rohwerte auf Zeile 1:

$$y_1^{(0)} = y_0 + h\,\dot y_0 + h^2\left[\frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{6}(\nabla f_1)\right],$$

$$h\,\dot y_1^{(0)} = h\,\dot y_0 \qquad + h^2\left[\quad f_0 + \frac{1}{2}(\nabla f_1)\right];$$

$$\text{daraus: } f_1^{(0)},\ \nabla f_1^{(0)}.$$

3. Rohwerte auf Zeile 2:

$$y_2^{(0)} = 2\,y_1^{(0)} - y_0 + h^2 f_1^{(0)},$$

$$h\,\dot y_2^{(0)} = h\,\dot y_0 \qquad + 2\,h^2 f_1^{(0)};$$

$$\text{daraus: } f_2^{(0)},\ \nabla f_2^{(0)},\ \nabla^2 f_2^{(0)}.$$

4. Verbesserte Rohwerte auf Zeile 1 und 2:

$$y_1^{(1)} = y_0 + h\,\dot y_0 \ + h^2\left(\frac{1}{2}f_0 \ + \frac{1}{6}\nabla f_1^{(0)} - \frac{1}{24}\nabla^2 f_2^{(0)}\right),$$

$$h\,\dot y_1^{(1)} = h\,\dot y_0 \qquad + h^2\left(\quad f_0 \ + \frac{1}{2}\nabla f_1^{(0)} - \frac{1}{12}\nabla^2 f_2^{(0)}\right),$$

$$y_2^{(1)} = 2\,y_1^{(1)} - y_0 + h^2\left(\quad f_1^{(0)} + \frac{1}{12}\nabla^2 f_2^{(0)}\right),$$

$$h\,\dot y_2^{(1)} = h\,\dot y_0 \qquad + h^2\left(\ 2\,f_1^{(0)} + \frac{1}{3}\nabla^2 f_2^{(0)}\right);$$

$$\text{daraus: } f_1^{(1)},\ f_2^{(1)},\ \nabla f_1^{(1)},\ \nabla f_2^{(1)},\ \nabla^2 f_2^{(1)}.$$

5. Rohwerte auf Zeile 3:

$$y_3^{(1)} = 2\,y_2^{(1)} - y_1^{(1)} + h^2\left(\quad f_2^{(1)} + \frac{1}{12}\nabla^2 f_2^{(1)}\right),$$

$$h\,\dot y_3^{(1)} = h\,\dot y_1^{(1)} \qquad + h^2\left(2\,f_2^{(1)} + \frac{1}{3}\nabla^2 f_2^{(1)}\right);$$

$$\text{daraus: } f_3^{(1)},\ \nabla f_3^{(1)},\ \nabla^2 f_3^{(1)},\ \nabla^3 f_3^{(1)}.$$

B. **Iterative Verbesserung:**

$$\left.\begin{aligned}
y_1^{(\nu+1)} &= y_0 + h\,\dot y_0 \quad + h^2\left(\frac{1}{2}f_0 \ + \frac{1}{6}\nabla f_1^{(\nu)} - \frac{1}{24}\nabla^2 f_2^{(\nu)} + \frac{1}{45}\nabla^3 f_3^{(\nu)}\right),\\
h\,\dot y_1^{(\nu+1)} &= h\,\dot y_0 \qquad + h^2\left(\quad f_0 \ + \frac{1}{2}\nabla f_1^{(\nu)} - \frac{1}{12}\nabla^2 f_2^{(\nu)} + \frac{1}{24}\nabla^3 f_3^{(\nu)}\right),\\
y_2^{(\nu+1)} &= 2\,y_1^{(\nu+1)} - y_0 + h^2\left(\quad f_1^{(\nu)} + \frac{1}{12}\nabla^2 f_2^{(\nu)}\right),\\
h\,\dot y_2^{(\nu+1)} &= h\,\dot y_0 \qquad + h^2\left(\ 2\,f_1^{(\nu)} + \frac{1}{3}\nabla^2 f_2^{(\nu)}\right),\\
y_3^{(\nu+1)} &= 2\,y_2^{(\nu+1)} - y_1^{(\nu+1)} + h^2\left(\quad f_2^{(\nu)} + \frac{1}{12}\nabla^2 f_3^{(\nu)}\right),\\
h\,\dot y_3^{(\nu+1)} &= h\,\dot y_1^{(\nu+1)} \qquad + h^2\left(2\,f_2^{(\nu)} + \frac{1}{3}\nabla^2 f_3^{(\nu)}\right)
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2.6).$$

Es wechseln ab:

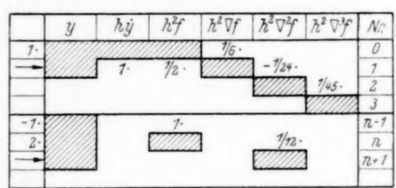
1. Verbessern der Werte y_i und $h\dot{y}_i$ nach (2.6);
2. Verbessern der Funktionswerte $f_i^{(\nu)} = f(t_i, y_i^{(\nu)}, \dot{y}_i^{(\nu)})$ und deren Differenzen,

bis sich die Werte nicht mehr ändern.

Für geringere Genauigkeitsansprüche und genügend kleine Schrittweite h genügt wieder die Anfangsiteration mit zwei Zeilen 1 und 2, also die Rechnung innerhalb der gestrichelten Umrandung.

Die Anfangsrechnung kann wiederum durch Anwendung von Schablonen erleichtert werden. Die Schablone zur Berechnung von y [11]) zeigt Tafel 6. Der untere Teil der Schablone dient auch zur fortlaufenden Rechnung. Zur Berechnung der $h\dot{y}$-Werte benutzt man die in Tafel 2 für Differentialgleichungen 1. Ordnung angegebene Schablone, wobei man y durch $h\dot{y}$ und hf durch $h^2 f$ zu ersetzen hat.

Tafel 6. Schablone zur Anfangsiteration nach (2.6) und zur fortlaufenden Rechnung der y-Werte nach (2.3).



10. Konvergenz der Iteration für die Ausgangswerte.

Drückt man in den Formeln (2.6) alle Differenzen durch die Funktionswerte f_0, f_1, f_2, f_3 aus, so erhält man Formeln der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} y_i^{(\nu+1)} &= y_0 + i\,h\,\dot{y}_0 + h^2 \sum_{k=0}^{3} \sigma_{ik} f_k^{(\nu)} \\ \dot{y}_i &= \dot{y}_0 \qquad\quad + h \sum_{k=0}^{3} \tau_{ik} f_k^{(\nu)} \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, 3) \quad \ldots\ldots \quad (2.7),$$

wobei die σ_{ik} und τ_{ik} die Werte haben:

$$(\sigma_{ik}) = \begin{pmatrix} \sigma_{10} \ldots\ldots \sigma_{13} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \sigma_{30} \ldots\ldots \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{97}{360} & \frac{19}{60} & -\frac{13}{120} & \frac{1}{45} \\ \frac{28}{45} & \frac{22}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{2}{45} \\ \frac{39}{40} & \frac{27}{10} & \frac{27}{40} & \frac{3}{20} \end{pmatrix}, \quad (\tau_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{19}{24} & -\frac{5}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Schreibt man (2.7) für ν und $\nu - 1$ an und zieht die entstehenden Gleichungen voneinander ab, so erhält man

$$y_i^{(\nu+1)} - y_i^{(\nu)} = h^2 \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik} \left(f_k^{(\nu)} - f_k^{(\nu-1)}\right)$$

$$\dot{y}_i^{(\nu+1)} - \dot{y}_i^{(\nu)} = h \sum_{k=1}^{3} \tau_{ik} \left(f_k^{(\nu)} - f_k^{(\nu-1)}\right).$$

Die Differenzen der Funktionswerte auf der rechten Seite werden mit Hilfe der Lipschitzbedingung nach (2.2) abgeschätzt:

$$\left.\begin{aligned} \left|y_i^{(\nu+1)} - y_i^{(\nu)}\right| &\leq h^2 \sum_{k=1}^{3} |\sigma_{ik}| \left(M \left|y_k^{(\nu)} - y_k^{(\nu-1)}\right| + L \left|\dot{y}_k^{(\nu)} - \dot{y}_k^{(\nu-1)}\right|\right) \\ \left|\dot{y}_i^{(\nu+1)} - \dot{y}_i^{(\nu)}\right| &\leq h \sum_{k=1}^{3} |\tau_{ik}| \left(M \left|y_k^{(\nu)} - y_k^{(\nu-1)}\right| + L \left|\dot{y}_k^{(\nu)} - \dot{y}_k^{(\nu-1)}\right|\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2.8).$$

Mit der Abkürzung

$$v_k^{(\nu)} = M \left|y_k^{(\nu)} - y_k^{(\nu-1)}\right| + L \left|\dot{y}_k^{(\nu)} - \dot{y}_k^{(\nu-1)}\right|$$

ergibt sich nach Multiplikation der beiden Gln. (2.8) mit M bzw. L und Addition die Beziehung

$$v_i^{(\nu+1)} \leq \sum_{k=1}^{3} \left(M h^2 |\sigma_{ik}| + L h |\tau_{ik}|\right) \cdot v_k^{(\nu)} \qquad (i = 1, 2, 3) \quad \ldots\ldots \quad (2.9).$$

Mit einem Gleichheitszeichen werden daraus Gleichungen für obere Schranken $V_i^{(\nu)}$ der Größen $v_i^{(\nu)}$. Diese Gleichungen lassen sich bequem in Matrizenform schreiben. Dazu faßt man die $V_i^{(\nu)}$ als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{v}^{(\nu)}$ auf. Mit der Matrix

$$\mathfrak{A} = (a_{ik}) = (M h^2 |\sigma_{ik}| + L h |\tau_{ik}|) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2.10)$$

lautet dann Gl. (2.9):

$$\mathfrak{v}^{(\nu+1)} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{v}^{(\nu)}$$

oder, indem man diese Beziehung rekursiv anwendet,

$$\mathfrak{v}^{(\nu+1)} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{v}^{(\nu)} = \mathfrak{A}^2\,\mathfrak{v}^{(\nu-1)} = \cdots = \mathfrak{A}^\nu\,\mathfrak{v}^{(1)}.$$

Nun konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{v}^{(\nu+1)} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{A}^\nu\right) \mathfrak{v}^{(1)}$ nach bekannten Sätzen, wenn die Matrix $\mathfrak{A}$ charakteristische Zahlen hat, deren sämtliche Beträge kleiner sind als 1. Ist das erfüllt, so konvergiert also auch die Anfangsiteration nach Gl. (2.6). Zur Untersuchung der charakteristischen Zahlen der Matrix $\mathfrak{A}$ schreiben wir

$$L h = p \cdot M h^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2.11)$$

unter Einführen eines Parameters p. Die größte charakteristische Zahl s einer zweiten Matrix

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{M h^2}\,\mathfrak{A} = (|\sigma_{ik}|) + p\,(|\tau_{ik}|) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2.12)$$

ist dann eine Funktion von p, welche punktweise berechenbar und in Bild 3 dargestellt ist. Da der Betrag der charakteristischen Zahl von $\mathfrak{A}$ kleiner als 1 sein soll, hat man die Bedingung

$$s \cdot M h^2 < 1.$$

Als Konvergenzgrenze erhält man damit für die beiden Größen $M h^2$ und $L h$ die Beziehungen

$$M h^2 = \frac{1}{s(p)}, \qquad L h = \frac{p}{s(p)} \quad . \; . \quad (2.13),$$

welche in Parameterform die fast geradlinige Grenze des Konvergenzbereiches in einer Ebene mit den Koordinaten $L h$ und $M h^2$ angeben, siehe Bild 4.

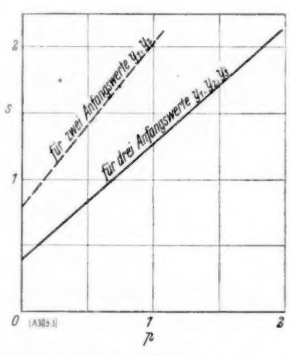


Bild 3. (oben). Verlauf $s = s(p)$.

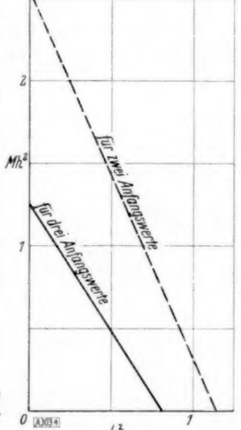


Bild 4 (rechts). Konvergenzgrenzen für die Anfangsiteration nach Gl. (2.6).

11. Fehler der Ausgangswerte.

Für die zweite Ableitung $\ddot{y}$ der exakten Lösung $y(t)$ schreiben wir die Newtonsche Interpolationsformel mit absteigenden Differenzen [14])

$$\ddot{y}(t) = f_0 + u\,\Delta^1 f_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\,\Delta^2 f_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\,\Delta^3 f_0 + R$$

mit dem Restglied

$$R = \frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{4!}\,h^4 f^{(4)}(\tau),$$

wo statt t die Veränderliche $u = \frac{1}{h}(t - t_0)$ eingeführt und τ eine Zwischenstelle aus dem Intervall $0 \leq u \leq 3$ ist.

Eine Integration liefert

$$\dot{y}(t) = \dot{y}_0 + h\left[f_0 u + \Delta^1 f_0 \frac{u^2}{2} + \Delta^2 f_0\left(-\frac{u^2}{4} + \frac{u^3}{6}\right) + \Delta^3 f_0\left(\frac{u^2}{6} - \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24}\right)\right] + S \quad . \; . \; . \quad (2.14)$$

mit $S = \int_{t_0}^{t_0+uh} R\,\mathrm{d}t = h\int_0^u R\,\mathrm{d}u$. Das Integral kann abgeschätzt werden durch

$$|S(t)| = \frac{h^5}{4!}\,|f^{(4)}|_{\max} \int_0^u |u(u-1)(u-2)(u-3)|\,\mathrm{d}u.$$

[14]) G. Schulz: Formelsammlung [3]), S. 74.

Die Ausrechnung ergibt

$$|S(h)| \leq \frac{h^5}{4!} |f^{(4)}|_{\max} \cdot \frac{19}{30}$$

$$|S(2h)| \leq \frac{h^5}{4!} |f^{(4)}|_{\max}$$

$$|S(3h)| \leq \frac{h^5}{4!} |f^{(4)}|_{\max} \cdot \frac{49}{30}.$$

Eine nochmalige Integration liefert

$$y(t) = y_0 + \dot{y}_0 u h + h^2 \left[f_0 \frac{u^2}{2} + \Delta^1 f_0 \frac{u^3}{6} + \Delta^2 f_0 \left(-\frac{u^3}{12} + \frac{u^4}{24} \right) + \Delta^3 f_0 \left(\frac{u^3}{18} - \frac{u^4}{24} + \frac{u^5}{120} \right) \right] + U. \quad (2.15)$$

mit $|U| \leq \int_{t_0}^{t_0 + uh} |S| \, \mathrm{d}t$.

Bei Ausrechnung erhält man die Werte

$$|U(h)| \leq \frac{h^6 |f^{(4)}|_{\max}}{4!} \cdot \frac{7}{20}, \quad |U(2h)| \leq \frac{h^6 |f^{(4)}|_{\max}}{4!} \cdot \frac{7}{6}$$

$$|U(3h)| \leq \frac{h^6 |f^{(4)}|_{\max}}{4!} \cdot \frac{49}{20}.$$

Die Näherungen $y_1, y_2, y_3, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3$ genügen nun den Gleichungen, die aus (2.6) durch Fortlassen der Klammern (ν) und $(\nu + 1)$ hervorgehen. Zieht man diese von (2.14) bzw. (2.15) ab, so erhält man für die Fehler ε_ν bzw. ζ_ν:

$$\varepsilon_i = y_i - y(ih) = h^2 \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik} (f_k - f(x_k)) + U_i,$$

$$\zeta_i = \dot{y}_i - \dot{y}(ih) = h \sum_{k=1}^{3} \tau_{ik} (f_k - f(x_k)) + S_i.$$

Schätzt man die Differenzen der Funktionswerte mittels der Lipschitzkonstanten nach (2.2) ab, so folgt

$$|\varepsilon_i| \leq h^2 \sum_{k=1}^{3} |\sigma_{ik}| (M |\varepsilon_k| + L |\zeta_k|) + |U_i|,$$

$$|\zeta_i| \leq h \sum_{k=1}^{3} |\tau_{ik}| (M |\varepsilon_k| + L |\zeta_k|) + |S_i|.$$

Mit Gleichheitszeichen ergeben sich 6 Gleichungen für 6 unbekannte obere Schranken Y_i und Z_i der Fehler $|\varepsilon_i|$ und $|\zeta_i|$, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} Y_i &= h^2 \sum_{k=1}^{3} |\sigma_{ik}| (M Y_k + L Z_k) + |U_i| \\ Z_i &= h \sum_{k=1}^{3} |\tau_{ik}| (M Y_k + L Z_k) + |S_i| \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3) \right\} \quad \ldots \ldots \quad (2.16).$$

Faßt man die Unbekannten als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{x}$ auf

$$\mathfrak{x} = (Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, Z_3) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6),$$

so läßt sich das Gleichungssystem (2.16) in der Gestalt schreiben

$$\mathfrak{x} = h \mathfrak{A} \mathfrak{x} + \mathfrak{r} \quad \ldots \ldots \quad (2.17),$$

wobei die Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} h M |\sigma_{ik}| & h L |\sigma_{ik}| \\ M |\tau_{ik}| & L |\tau_{ik}| \end{pmatrix}$$

und der Vektor

$$\mathfrak{r} = (U_1, U_2, U_3, S_1, S_2, S_3) = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6)$$

ist. Die Lösung von (2.17) lautet in Matrizenform mit der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{x} = (\mathfrak{E} + h \mathfrak{A} + h^2 \mathfrak{A}^2 + \cdots) \mathfrak{r} \quad \ldots \ldots \quad (2.18).$$

Haben alle Elemente von $\mathfrak{A}$ höchstens den Betrag a, so sind alle Elemente von $\mathfrak{A}^2$ dem Betrage nach höchstens gleich $6a^2$ und die von $\mathfrak{A}^q$ höchstens gleich $\frac{1}{6}(6a)^q$. Die Aufsummierung der Reihe (2.18) liefert dann, wenn man die obengenannte Abschätzung durchführt, für die oberen Schranken Y_i und Z_i der Fehlerbeträge:

$$x_i = r_i + \frac{h\,a}{1-6\,h\,a}\sum_{k=1}^{6} r_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.19).$$

12. Konvergenz der Iteration nach Gl. (2.3).

Schreibt man die Gl. (2.3) in der Gestalt

$$y_{n+1}^{(\nu+1)} = 2\,y_n - y_{n-1} + \frac{h^2}{12}\left(f_{n-1} + 10\,f_n + f_{n+1}^{(\nu)}\right)$$

$$\dot{y}_{n+1}^{(\nu+1)} = \dot{y}_{n-1} + \frac{h}{3}\left(f_{n-1} + 4\,f_n + f_{n+1}^{(\nu)}\right)$$

für die Indizes ν und $\nu-1$ an und zieht die so entstehenden Gleichungen voneinander ab, so erhält man

$$y_{n+1}^{(\nu+1)} - y_{n+1}^{(\nu)} = \frac{h^2}{12}\left(f_{n+1}^{(\nu)} - f_{n+1}^{(\nu-1)}\right)$$

$$\dot{y}_{n+1}^{(\nu+1)} - \dot{y}_{n+1}^{(\nu)} = \frac{h}{3}\left(f_{n+1}^{(\nu)} - f_{n+1}^{(\nu-1)}\right).$$

Schätzt man die rechten Seiten mit Hilfe der Lipschitzkonstanten ab, so erhält man für die Änderungsbeträge

$$\left|y_{n+1}^{(\nu+1)} - y_{n+1}^{(\nu)}\right| = \varepsilon_{n+1}^{(\nu)}$$

$$\left|\dot{y}_{n+1}^{(\nu+1)} - \dot{y}_{n+1}^{(\nu)}\right| = \zeta_{n+1}^{(\nu)}$$

die Ungleichungen

$$\varepsilon_{n+1}^{(\nu)} \leq \frac{h^2}{12}\left(M\,\varepsilon_{n+1}^{(\nu-1)} + L\,\zeta_{n+1}^{(\nu-1)}\right)$$

$$\zeta_{n+1}^{(\nu)} \leq \frac{h}{3}\left(M\,\varepsilon_{n+1}^{(\nu-1)} + L\,\zeta_{n+1}^{(\nu-1)}\right).$$

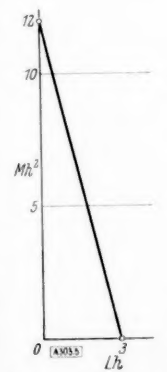


Bild 5. Konvergenzgrenze für die Iterationen nach Gl. (2.5).

Mit der Abkürzung $M\,\varepsilon_{n+1}^{(\nu)} + L\,\zeta_{n+1}^{(\nu)} = v_{n+1}^{(\nu)}$ folgt

$$v_{n+1}^{(\nu)} \leq \left(\frac{h^2\,M}{12} + \frac{h\,L}{3}\right) v_{n+1}^{(\nu-1)}.$$

Da die $v_{n+1}^{(\nu)}$ nicht negativ sind, nehmen sie für

$$\frac{h^2\,M}{12} + \frac{h\,L}{3} < 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.20)$$

mindestens so stark wie die Glieder einer geometrischen Reihe ab. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Konvergenz der Iterationen gesichert.

In Bild 5 ist in einer Ebene mit den Koordinaten $L\,h$ und $M\,h^2$ das Konvergenzgebiet eingezeichnet. Der Vergleich zeigt, daß das Gebiet viel größer ist als das Konvergenzgebiet für die Anfangsiteration. Man führt daher die Anfangsiteration vorteilhaft oft mit kleinerer Schrittweite als die eigentliche Rechnung durch.

13. Fehlerabschätzung für die Formel (2.3).

Den Ausgangspunkt für die Fehlerabschätzung bildet wieder die Newtonsche Interpolationsformel für $\ddot{y}$, aber diesmal mit aufsteigenden Differenzen geschrieben (mit $t = t_{n+1} + u\,h$).

$$\ddot{y} = f_{n+1} + u\,\nabla f_{n+1} + \frac{u\,(u+1)}{2\,!}\,\nabla^2 f_{n+1} + \frac{u\,(u+1)\,(u+2)}{3\,!}\,\nabla^3 f_{n+1} + R$$

mit dem Newtonschen Restglied

$$R = \frac{u\,(u+1)\,(u+2)\,(u+3)}{4\,!}\,h^4 f^{(4)}(\tau),$$

wo τ eine Zwischenstelle aus dem Intervall $t_{n-2}, \cdots t_{n+1}$ ist.

Eine Integration dieser Gleichung liefert

$$\left.\begin{aligned}\dot y(t)-\dot y(t_{n+1}) &= \int_{t_{n+1}}^{t}\ddot y\,\mathrm d t = h\int_0^u \ddot y\,\mathrm d u\\ &= h\left[f_{n+1}\,u+\nabla f_{n+1}\frac{u^2}{2}+\nabla^2 f_{n+1}\left(\frac{u^2}{4}+\frac{u^3}{6}\right)+\nabla^3 f_{n+1}\left(\frac{u^2}{6}+\frac{u^3}{6}+\frac{u^4}{24}\right)\right]+S\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (2.21)$$

mit $S=h\int_0^u R\,\mathrm d u$. Dieses Integral kann abgeschätzt werden durch

$$|S(t)|\leq\frac{h^5}{4!}\,|f^{(4)}|_{\max}\cdot|T(u)|,$$

wobei $T(u)=\int_u^0 |u(u+1)(u+2)(u+3)|\,\mathrm d u$ gesetzt ist.

Es ist $T(-2)=\int_{-2}^{-1}|\cdots|\,\mathrm d u+\int_{-1}^{0}|\cdots|\,\mathrm d u=1$. Insbesondere folgt für $t=t_{n-1}$ oder $u=-2$:

$$\dot y(t_{n+1})-\dot y(t_{n-1})=h\left[2f_n+\frac{1}{3}\nabla f_{n+1}\right]+S_1$$

mit

$$|S_1|\leq\frac{h^5}{4!}\,|f^{(4)}|_{\max}.$$

Weitere Integrationen liefern aus (2.21)

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2 y(t_{n+1}) &= \int_{t_n}^{t_{n+1}}\dot y\,\mathrm d t+\int_{t_n}^{t_{n-1}}\dot y\,\mathrm d t = h^2\left[f_n+\frac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1}\right]+U_1\\ \text{mit}\quad |U_1| &\leq h\left|\int_{-1}^{0}S\,\mathrm d u\right|+h\left|\int_{-1}^{-2}S\,\mathrm d u\right|\leq\frac{7}{144}\,h^6\,|f^{(4)}|_{\max}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (2.22).$$

Die Näherungen y_n, $\dot y_n$ genügen nun den Gleichungen

$$\nabla^2 y_{n+1}=h^2\sum_{\varrho=0}^{2}\alpha_\varrho f_{n+1-\varrho}$$

$$\dot y_{n+1}-\dot y_{n-1}=h\sum_{\varrho=0}^{2}\beta_\varrho f_{n+1-\varrho},$$

wobei nach (2.3) $\alpha_0=\alpha_2=\frac{1}{12}$; $\alpha_1=\frac{10}{12}$; $\beta_0=\beta_2=\frac{1}{3}$; $\beta_1=\frac{4}{3}$.

Subtraktion von (2.21) bzw. (2.22) liefert für die Fehler ε_n und ζ_n:

$$\nabla^2\varepsilon_{n+1}=h^2\sum_{\varrho=0}^{2}\alpha_\varrho\,[f(t_{n+1-\varrho})-f_{n+1-\varrho}]-U_1$$

$$\zeta_{n+1}-\zeta_{n-1}=h\sum_{\varrho=0}^{2}\beta_\varrho\,[f(t_{n+1-\varrho})-f_{n+1-\varrho}]-S_1,$$

oder wenn die Differenzen der Funktionswerte mittels der Lipschitzkonstanten abgeschätzt werden

$$|\nabla^2\varepsilon_{n+1}|\leq h^2\sum_{\varrho=0}^{2}\alpha_\varrho\,(M\,|\varepsilon_{n+1-\varrho}|+L\,|\zeta_{n+1-\varrho}|)+U_1$$

$$|\zeta_{n+1}-\zeta_{n-1}|\leq h\sum_{\varrho=0}^{2}\beta_\varrho\,(M\,|\varepsilon_{n+1-\varrho}|+L\,|\zeta_{n+1-\varrho}|)+S_1.$$

Bedeuten Y_n und Z_n obere Schranken für $|\varepsilon_n|$ und $|\zeta_n|$, so kann man für Y_n und Z_n die Gleichungen verwenden

$$\left.\begin{aligned} V^2\, Y_{n+1} &= h^2 \sum_{\varrho=0}^{2} a_\varrho (M\, Y_{n+1-\varrho} + L\, Z_{n+1-\varrho}) + U_1 \\ Z_{n+1} - Z_{n-1} &= h \sum_{\varrho=0}^{2} \beta_\varrho (M\, Y_{n+1-\varrho} + L\, Z_{n+1-\varrho}) + S_1 \end{aligned}\right| \quad (2.23).$$

Mit diesen Formeln ist im Prinzip die Fehlerabschätzung geleistet. Hat man die Fehlerschranken Y, Z bis Y_n, Z_n berechnet, so liefern diese Formeln (2.23) zwei Gleichungen zur Berechnung von Y_{n+1} und Z_{n+1}.

Diese schrittweise Berechnung der Fehler ist oft etwas mühsam, und man erhält keinen Ueberblick über das Wachstum der Fehler. Man kann die Größen Y_n und Z_n durch ein Potenzgesetz abschätzen, da (2.23) lineare Differenzengleichungen für Y_n, Z_n sind.

Eine Sonderlösung der inhomogenen Gleichungen ist

$$Y_n = \frac{1}{M}\left[-\frac{U_1}{h^2} - L\left(\frac{S_1}{2} - \frac{U_1}{h}\right) n\right], \qquad Z_n = \left(\frac{S_1}{2} - \frac{U_1}{h}\right) n.$$

Die Lösungen der den (2.23) entsprechenden homogenen Gleichungen werden durch den Ansatz gewonnen

$$Y_n = A\, z^n,\; Z_n = B\, z^n.$$

Dabei ist z Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} z^2 - 2z + 1 - M h^2 \sum_{\varrho=0}^{2} a_\varrho z^{2-\varrho} & - L h^2 \sum_{\varrho=0}^{2} a_\varrho z^{2-\varrho} \\ M h \sum_{\varrho=0}^{2} \beta_\varrho z^{2-\varrho} & z^2 - 1 - L h \sum_{\varrho=0}^{2} \beta_\varrho z^{2-\varrho} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.24).$$

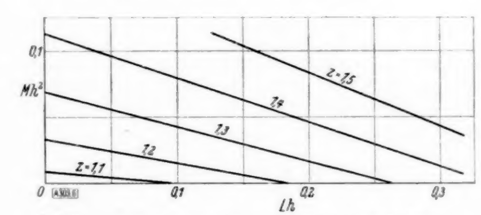


Bild 6. Geraden $z=$ konst. in der Lh-Mh^2-Ebene.

Diese Gleichung hat mehrere Wurzeln z. Entscheidend für das Fehlerwachstum ist die Wurzel z vom größten Betrage. In Bild 6 ist diese Wurzel in Abhängigkeit von den Größen Lh und Mh^2 aufgetragen; dabei sind die Kurven $z=$ konst. gerade Linien, denn aus Gl. (2.24) folgt:

$$\left(\frac{(z-1)^2}{\sum_{\varrho=0}^{2} a_\varrho z^{2-\varrho}} - h^2 M\right)\cdot\left(\frac{z^2-1}{\sum_{\varrho=0}^{2} \beta_\varrho z^{2-\varrho}} - h\, L\right) - h^3 L M = 0,$$

wobei sich das Glied $h^3 L M$ heraushebt und eine in Lh und Mh^2 lineare Gleichung entsteht.

Zur praktischen Fehlerabschätzung wird es meist vorzuziehen sein, die Fehler schrittweise aus (2.23) zu berechnen, da bei der Abschätzung der Fehler nach einem Potenzgesetz die Fehlerschranken, besonders bei großer Schrittanzahl n, die wirklichen Fehler in vielen Fällen oft stark überschreiten.

Um über ein längeres Intervall, in welchem sich die Werte Lh und Mh^2 ändern, annähernd mit gleicher Genauigkeit, d. h. mit gleicher Stärke der Fortpflanzung der Fehler zu rechnen, kann man sinnvoll die Schrittweite h so abstufen, daß man sich in Bild 6 annähernd auf der gleichen Fehlergeraden $z=$ konst. bewegt, wobei der Zahlenwert von z sich nach den Genauigkeitsansprüchen richtet. Der Wert von $z-1$ entspricht dabei wieder angenähert der Schrittkennzahl $k=|\varkappa h|$, welche in Nr. 3 für Differentialgleichungen 1. Ordnung eingeführt und für mittlere Verhältnisse mit 0,05 bis 0,10 angegeben worden war. Für kleine Werte von $z-1$ gilt die Näherung:

$$h^2 M + k\, h\, L - k^2 = 0.$$

KLEINE MITTEILUNGEN

Bemerkung zur Kirchhoffschen Plattenströmung. Es ist bekannt, daß eine Unstetigkeitsfläche, wie sie z. B. bei der bekannten Kirchhoffschen Plattenströmung auftritt, unter Berücksichtigung der Flüssigkeitsreibung nur als Anfangszustand möglich ist, und im weiteren Verlauf rasch in der Weise vernichtet wird, daß sich die Wirbel, welche auf der Trennungsfläche liegen, in die Flüssigkeit hinein verbreiten; die Trennungsfläche erweist sich also als stark labil[1]). Man sieht, daß einer solchen Betrachtung die folgende Voraussetzung (welche auch im Wesen der Flüssigkeitsreibung liegt) zugrunde liegt:

(V): Die beiden vorher getrennten Flüssigkeiten affizieren sich über die Trennungsfläche hinweg.

Für wirkliche Flüssigkeiten ist diese Voraussetzung stets erfüllt, da sie mit der Brownschen Molekularbewegung ausgestattet sind. Für ideale jedoch nicht. Will man also hier in Übereinstimmung mit der Theorie die scharfe Trennungsfläche behalten, so hat man dafür künstlich Sorge zu tragen, indem man z. B. die Trennungsfläche als Membran gestaltet, oder die ruhende Flüssigkeit durch ein anderes Medium wie Luft ersetzt und so die Gefahr einer Affizierung nahezu ausschaltet (freier Helmholtzscher Strahl); in jedem Fall erhält man dann eine ideale Strömung, die physikalisch, d. h. im Rahmen der Theorie der idealen Flüssigkeiten, möglich ist; doch scheint sich, solange man in diesem Rahmen bleibt, die Instabilität der Trennungs- bzw. Begrenzungsfläche nicht zu ergeben. Indessen können wir (ähnlich wie dies Prandtl in anderer Hinsicht bei Aufstellung seiner Tragflügeltheorie getan hat) durch einfache Hinzunahme der Voraussetzung (V) diesen Rahmen erweitern (und so in gewisser Weise der Reibung Rechnung tragen, ohne daß es jedoch nötig wäre, von der Reibung zu sprechen!) und uns fragen, ob wir vielleicht in der solchermaßen ergänzten Theorie der idealen Flüssigkeiten besagte Instabilität einsehen können. Die folgende heuristische Betrachtung will versuchen, auf diese Frage eine bejahende Antwort zu geben.

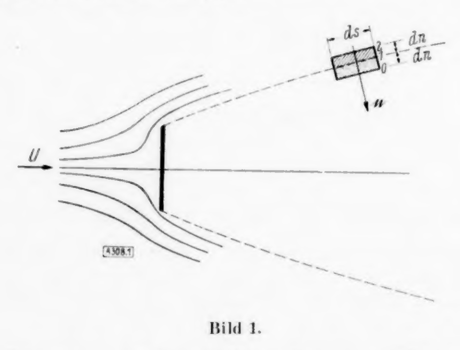


Bild 1.

Betrachten wir das in Bild 1 abgegrenzte Flüssigkeitselement: solange die Voraussetzung (V) nicht zutrifft, zerfällt es in zwei Teilchen, ein ruhendes und ein mit der Geschwindigkeit U bewegtes, die nichts miteinander zu tun haben; ihre Begrenzungslinien parallel zur Trennungslinie sind mit 0, 1, 2 bezeichnet, die diesbezüglichen Drucke seien p_0, p_1, p_2, wo also $p_0 = p_1$ ist; ds sei ihre Länge parallel der Trennungslinie, dn ihre Höhe. In der Normalenrichtung haben wir dann für das bewegte Teilchen mit r als Krümmungsradius die Gleichung

$$(p_2 - p_1)\,ds = \frac{U^2}{r}\,dn \cdot ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und für das ruhende Teilchen die Identität

$$0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Aus diesen beiden Gleichungen ersieht man, daß beim Durchtritt durch die Trennungslinie außer der Geschwindigkeit auch das normale Druckgefälle einen Sprung erleidet.

Lassen wir jetzt die Voraussetzung (V) zu, so bilden die beiden Flüssigkeitsteilchen von vorhin ein Ganzes, welches die mittlere Geschwindigkeit $\frac{U}{2}$ hat. An Stelle von (1) erhalten wir dann

$$(p_2 - p_0)\,ds = \frac{(U/2)^2}{r}\,2 \cdot dn \cdot ds \quad . \quad (3).$$

Wegen $p_0 = p_1$ ist hier gemäß (1) die linke Seite aber doppelt so groß wie die rechte! Ohne eine entsprechende Fremd- oder Haltekraft von der Größe $-\frac{1}{2}(p_2 - p_0)\,ds$ könnte also die neue Strömung nicht bestehen, d. h. die Instabilität der Trennungsfläche wäre erwiesen. Genauer ergäbe sich: dem zu großen Druckgefälle kann das Teilchen offenbar nur dadurch entgehen, daß es seinen Krümmungsradius entsprechend verkleinert. Auch sieht man, daß dieses Resultat nicht an die Besonderheit der Kirchhoffschen Plattenströmung gebunden ist, und z. B. auch für Trennungsflächen gilt, welche nicht ein Totwasser abgrenzen.

In dieser Betrachtungsweise ist eine Strömung mit Totwasser nur stabil, wenn die Trennungslinie an jeder Stelle einen unendlich großen Krümmungsradius besitzt, also geradlinig ist. Aber auch dieser Fall ist i. a. nicht möglich: ist nämlich $\Omega(z)$ die komplexe Stromfunktion, also $F(z) = \frac{d\,\Omega(z)}{d\,z}$ die komplexe Geschwindigkeit, so würde $F(z)$ an der Begrenzung eine Konstante C und daher überall $= C$ sein, d. h. es läge eine reine Parallelströmung vor.

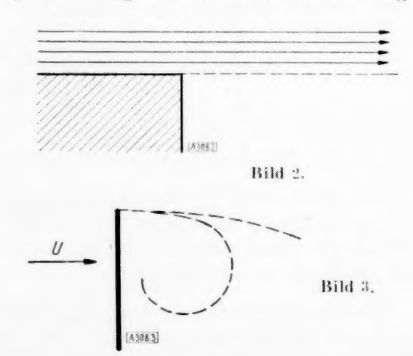


Bild 2.

Bild 3.

Bild 2 veranschaulicht einen solchen Fall. Liegt jedoch eine Strömung gegen eine Schneide wie in Bild 3 vor, so kann die Trennungslinie nicht geradlinig sein, ist also (nach unten) gekrümmt; alsdann wird sie an jeder Stelle ihren Krümmungsradius dauernd zu verkleinern suchen, und sich daher in bekannter Weise zu einem Wirbel aufspulen.

Breslau. Ernst Mohr. 308

[1]) Vgl. Cl. Schaefer: Einführung in die Theoretische Physik, 1. Bd. 3. Aufl. Berlin u. Leipzig 1929, S. 937 bis 943.

Kurze Bemerkung zur graphischen Lösung gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung. Die Praxis verlangt gelegentlich die Kenntnis einer Funktion, die einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung genügt. Zwar gehört die Auflösung einer solchen Differentialgleichung längst zum Allgemeingut nicht nur des Mathematikers, sondern auch des Technikers, es sei aber doch gestattet, auf die folgende graphische Lösungsmethode hinzuweisen. Sie ist besonders dann geeignet, wenn es darauf ankommt, für beliebige Stellen x die Funktion $y(x)$ numerisch zu kennen, falls beliebige Anfangswerte $y = y_0$ für beliebige Stellen $x = x_0$ vorgeschrieben sind. Auf ein solches Problem führt z. B. die Ermittlung der Bahngeschwindigkeit V eines Flugzeugs als Funktion der Flughöhe h, das unter konstantem Gleitwinkel (speziell im senkrechten Sturzflug) aus einer vorgegebenen Ausgangshöhe $h = h_0$ mit bekannter Anfangsgeschwindigkeit $V = V_0$ unter Berücksichtigung der mit der Höhe variablen Luftdichte eine gewisse Höhendifferenz durchstürzt [1].

Sei die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = f_0(x) \cdot y + f_1(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

mit im Intervall $a \leq x \leq b$ stetigen Koeffizienten $f_0(x)$ und $f_1(x)$ vorgelegt. Man setze

$$\left.\begin{aligned} &e^{\int_a^x f_0(t)\,dt} = F_0(x) \\ &\text{und — was wegen } F_0(x) \neq 0 \text{ möglich ist —} \\ &\int_a^x \frac{f_1(t)}{F_0(t)}\,dt = F_1(x) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Dann ist die aus der Gleichung

$$\frac{y}{F_0(x)} - F_1(x) = \frac{y(x_0)}{F_0(x_0)} - F_1(x_0) \quad . \quad . \quad (3)$$

zu ermittelnde Funktion $y(x)$ die eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung (1), die für $x = x_0$ den Wert $y = y_0 = y(x_0)$ annimmt. Mit

$$\frac{y(x_0)}{F_0(x_0)} - F_1(x_0) = -z$$

stellt aber die aus (3) hervorgehende Gleichung

$$y + F_0(x) \cdot z - F_0(x) F_1(x) = 0 \quad . \quad . \quad (4)$$

eine Geradenschar im rechtwinkligen y, z-System dar; Parameter ist dabei x.

Man denke sich die zu gewissen Parameterwerten gehörigen Individuen dieser Geradenschar gezeichnet. Wünscht man nun den Wert $y = y_1$ der Lösung $y = y(x)$ von (1) für $x = x_1$ zu kennen, falls der Anfangswert $y = y_0$ für $x = x_0$ vorgeschrieben ist, so gehe man vom Punkt y_0 der Abszissenachse (y-Achse) senkrecht hoch bis zum Punkt P_0 auf der Geraden mit dem Parameterwert x_0, dann von P_0 horizontal weiter bis zum Punkt P_1 auf der Geraden mit dem Parameterwert x_1 und hat in der Abszisse von P_1 den gesuchten Wert y_1 gefunden (siehe Bild 1).

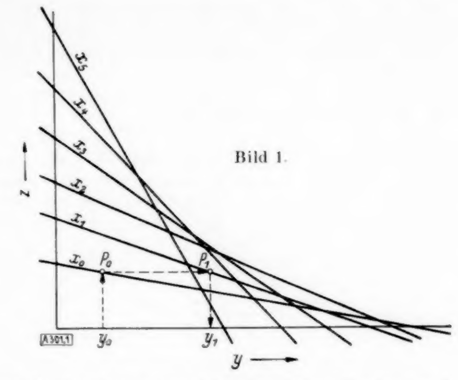


Bild 1.

Um nicht nach dem Parameter x interpolieren zu müssen und um durch das Zeichnen von vielen Geraden die Übersichtlichkeit nicht leiden zu lassen, ist es vorteilhaft, das y, z-Achsenkreuz überhaupt mit keiner fertig gezeichneten Schargeraden zu belasten, sondern dafür lieber die jeweils gebrauchten Geraden ad hoc rasch zu konstruieren.

Ein Mittel hierzu ist beispielsweise folgendes: Die Geraden (4) schneiden auf der y-Achse den Abschnitt $Y(x) = F_0(x) F_1(x)$, auf der z-Achse den Achsenabschnitt $Z(x) = F_1(x)$ ab. Es genügt dann vollkommen, sowohl der z-Achse als auch der y-Achse jeweils eine x-Achse zu überlagern, über der die entsprechenden Achsenabschnittskurven $Y = Y(x)$ und $Z = Z(x)$ aufgetragen werden (siehe Bild 2). Statt der Abschnitte auf der y- und z-Achse können natürlich auch irgendwelche andere für das jeweils vorliegende Problem evtl. besser geeignete Bestimmungsstücke der Schargeraden als Funktion des Scharparameters angegeben werden.

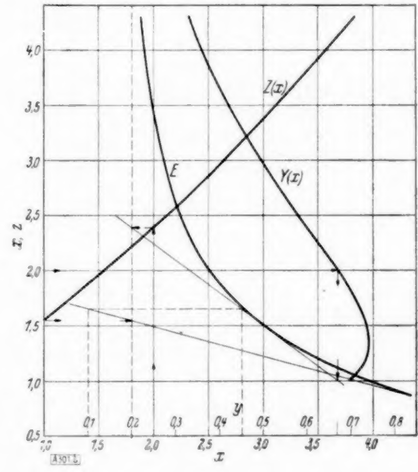


Bild 2.

Von Nutzen kann auch die möglicherweise vorhandene Einhüllende E der Geradenschar (4) sein. Durch Differentiation nach dem Scharparameter x entsteht aus (4) die weitere Gleichung

$$\frac{d F_0(x)}{d x} \cdot z - F_0(x) \cdot \frac{d F_1(x)}{d x} - \frac{d F_0(x)}{d x} \cdot F_1(x) = 0 \quad (5),$$

so daß sich E unter Beachtung von (2) in der Parameterdarstellung

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{f_1(x)}{f_0(x)} \\ z &= F_1(x) + \frac{f_1(x)}{f_0(x)} \cdot \frac{1}{F_0(x)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

[1] Siehe hierzu H. Behrbohm: Graphische Konstruktion von Sturzfluggeschwindigkeiten. Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940) Lfg. 6, S. 167 bis 171, wo für den genannten speziellen Fall aus der Praxis die im folgenden skizzierte Methode mit Erfolg verwendet wurde.

ergibt; y und z sind die Koordinaten des Berührungspunktes B von E mit der zum entsprechenden Parameterwert x gehörigen Schargeraden. Liegt E im y, z-System gezeichnet vor, so hat man eine gute Kontrolle für das Zeichnen der Geraden, da diese ja E in B berühren müssen.

Des weiteren liefert die Kurve E in der Abszisse y_E ihres Schnittpunktes mit der Geraden $z = \text{const} = c$ einen analytischen Extremwert derjenigen Integralkurve $y = y(x)$ von (1), die durch die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ gerade den durch $z = -\frac{y(x_0)}{F(x_0)} + F_1(x_0) = c$ bestimmten Wert c festlegt: aus $y_E = -\frac{f_1(x)}{f_0(x)}$ folgt nämlich $f_0(x) \cdot y_E + f_1(x) = 0$, d. h. nach (1) $y' = 0$ für $y = y_E$.

Die oben erwähnte Aufgabe aus der Flugmechanik führt zur Differentialgleichung

$$y' = -\alpha y + \frac{\beta}{x},$$

falls mit x die Luftdichte, mit y das Quadrat der Fluggeschwindigkeit und mit α und β geeignete Konstante (in die der aerodynamische Widerstand und die Flächenbelastung des Flugzeugs eingehen) bezeichnet werden. Als funktionale Bindung zwischen Flughöhe und Luftdichte ist dabei ein gegenüber der polytropischen Atmosphäre angenäherter Exponentialansatz getroffen worden.

Für dieses Beispiel wird (mit $a = 0$)

$$F_0(x) = e^{-\alpha x},$$

$$F_1(x) = \beta \int_0^x \frac{e^{\alpha t}}{t} \, dt = \beta \int_0^{\alpha x} \frac{e^t}{t} \, dt = \beta \overline{Ei}(\alpha x)$$

(in der Bezeichnungsweise von Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 2. Aufl., Berlin 1933, S. 79).
Die Geradenschar (4) lautet demnach

$$y + e^{-\alpha x} \cdot z - \beta e^{-\alpha x} \overline{Ei}(\alpha x) = 0.$$

Sie hat die Abschnittsfunktionen

$$\left.\begin{aligned} Y(x) &= \beta e^{-\alpha x} \overline{Ei}(\alpha x) \\ Z(x) &= \beta \overline{Ei}(\alpha x) \end{aligned}\right\}$$

und die Einhüllende E

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\beta}{\alpha x} \\ z &= \beta \overline{Ei}(\alpha x) - \frac{\beta e^{\alpha x}}{\alpha x} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (E).$$

Zu einer Anfangsluftdichte $x = x_0$, die zu einer bekannten Gleitflugausgangshöhe gehört, und zu einem vorgegebenen Geschwindigkeitsquadrat $y = y_0$ im Anfangszustand gehört dann jeweils ein eindeutig bestimmtes Geschwindigkeitsquadrat $y(x)$, das mit abnehmender Flughöhe (d. h. mit zunehmender Luftdichte x) zunimmt, bis ein durch $y = y_E$ gegebenes Maximum erreicht wird; anschließend fällt y annähernd linear mit x.

Bild 2 gibt die Verhältnisse dieses speziellen Beispiels im Intervall $1 \leq x \leq 4$ wieder. Dabei ist die Achsenabschnittsfunktion $Z(x)$ ersetzt durch die Abschnittsfunktion $Z(x) = z(y = 0{,}2)$ der Schargeraden mit der zur z-Achse parallelen Geraden $y = 0{,}2$. Für $x = 1{,}0$ sei $y = 0{,}1$. Bild 2 gibt dann beispielsweise für $x = 2{,}0$ den Wert $y = 0{,}45$.

Augsburg. H e r m a n n B e h r b o h m. 301

Zur Theorie der Wirbelbewegung.

In einem Aufsatz mit derselben Überschrift[1]) hat A. K n e s c h k e ein Minimalprinzip angegeben, aus dem die Bewegungsgleichungen isolierter Potentialwirbel in ebenen, einfach zusammenhängenden Gebieten einer idealen Flüssigkeit abgeleitet werden können. Dabei geht Kneschke so vor, daß er zunächst diese Bewegungsgleichungen potentialtheoretisch berechnet und dann ein Variationsprinzip konstruiert, das mit diesen Bewegungsgleichungen äquivalent ist. Im folgenden soll nun gezeigt werden, wie man dieses Minimalprinzip mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips direkt aufstellen und damit auch physikalisch deuten kann. Ferner wird dieses Prinzip auf das Wirbelband einer tragenden Linie angewandt, wobei sich die Prandtlsche Gleichung für den Abwind ergibt.

1. I s o l i e r t e W i r b e l f ä d e n.

Wenn sich in einem unendlich ausgedehnten ebenen Flüssigkeitsgebiet isolierte Wirbel befinden, so ist die Eigengeschwindigkeit $\mathfrak{v}_i = i \dot{x}_i + j \dot{y}_i$ des i-ten Wirbels Γ_i an der Stelle $\mathfrak{r}_i = i x_i + j y_i$ gleich der von den anderen Wirbeln Γ_k induzierten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_i = \Sigma'_k \mathfrak{v}_{ik}$, mit $k \neq i$. $\mathfrak{v}_{ik}$ ist die Geschwindigkeit, die der Wirbel Γ_k an der Stelle $\mathfrak{r}_i$ induziert; sie steht senkrecht zur Verbindungslinie $\mathfrak{r}_{ik}$ der beiden Wirbel Γ_k und Γ_i. Denkt man sich den Wirbel Γ_i durch einen ruhenden starren Körper in einer Strömung mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_i$ und der Zirkulation Γ_i ersetzt, so wird auf diesen Körper von der Flüssigkeit nach dem Kutta-Joukowskischen Satz eine Kraft senkrecht zu $\mathfrak{v}_i$ ausgeübt. In diesem Sinne kann man daher sagen, daß ein Wirbel Γ_k auf einen anderen Γ_i eine Kraft in Richtung der Verbindungslinie der beiden Wirbel ausübt, die folgende Größe hat:

$$\mathfrak{K}_{ik} = \varrho \Gamma_i \lfloor \mathfrak{v}_{ik} = \frac{\varrho}{2\pi} \Gamma_i \Gamma_k \frac{1}{r_{ik}} \cdot \frac{\mathfrak{r}_{ik}}{r_{ik}} \quad . \quad (1).$$

wobei $\lfloor \mathfrak{v}_{ik} \perp \mathfrak{v}_{ik}, \quad |\lfloor \mathfrak{v}_{ik}| = |\mathfrak{v}_{ik}|$

und $\mathfrak{r}_{ik} = \mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_k, \quad r_{ik} = |\mathfrak{r}_{ik}|.$

ϱ ist die Dichte der Flüssigkeit. Zwei Wirbel mit gleichem Drehungssinn (Γ_i und Γ_k gleiches Vorzeichen) stoßen sich ab, $\mathfrak{K}_{ik}$ und $\mathfrak{r}_{ik}$ haben dieselbe Richtung (s. Bild 1); bei entgegengesetztem Drehungssinn ziehen sie sich an, die Richtung von $\mathfrak{K}_{ik}$ ist entgegengesetzt der von $\mathfrak{r}_{ik}$.

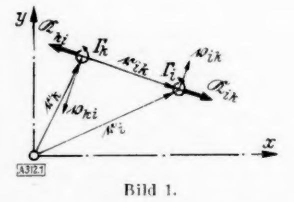


Bild 1.

Mit Hilfe der so eingeführten Kräfte kann man nun die kinetische Energie E des durch die Wirbel verursachten Strömungsfeldes leicht berechnen. Zunächst ist es naheliegend, sich alle Wirbel im Unendlichen zu denken und nun jeden einzelnen Wirbel an die vorgeschriebene Stelle $\mathfrak{r}_i$ zu bringen. Um die Arbeit, die dabei infolge der gegenseitigen Abstoßung bzw. Anziehung der Wirbel zu leisten ist, ist dann die kinetische Energie des

[1]) A. K n e s c h k e: Zur Theorie der Wirbelbewegung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938) S. 343.

Feldes vergrößert worden. Bei dieser Rechnung muß man aber mit Grenzwerten arbeiten, die durch die folgende Betrachtung umgangen werden können. Es sei E die kinetische Energie der Flüssigkeit, wenn sich die Wirbel Γ_i an den Stellen $\mathfrak{r}_i$ befinden und die gegenseitigen Abstände $\mathfrak{r}_{ik}$ haben. Wir denken uns nun, ohne die Zirkulation zu ändern, einige Wirbel verschoben, so daß die Abstände $\mathfrak{r}_{ik}^*$ und die kinetische Energie E^* betragen. Die Differenz $E^* - E$ entspricht der beim Verschieben der Wirbel von einer äußeren Kraft zu leistenden Arbeit A:

$$A = E^* - E = \sum\nolimits_{ik} \int_{\mathfrak{r}_{ik}}^{\mathfrak{r}_{ik}^*} \mathfrak{K}_{ik} \circ d\mathfrak{r}_{ik}$$

$$= \frac{\varrho}{2\pi} \sum\nolimits_{ik} \Gamma_i \Gamma_k \lg r_{ik}^* - \frac{\varrho}{2\pi} \sum\nolimits_{ik} \Gamma_i \Gamma_k \lg r_{ik}, \quad k \neq i.$$

Daraus folgt nun:

$$E = \frac{\varrho}{2\pi} \sum\nolimits_{ik} \Gamma_i \Gamma_k \lg r_{ik} + E_\infty \quad . \quad . \quad (2),$$

wobei

$$E_\infty = E_\infty(\varrho, \Gamma_i, \Gamma_k).$$

Da bereits die Energie eines Potentialwirbels unendlich groß ist, sind E_∞ und damit auch E ebenfalls unendlich groß. Jedoch hängt E_∞ nicht von der Lage der Wirbel ab, sondern ist eine ortsunabhängige Konstante. Die Abhängigkeit der kinetischen Energie von der gegenseitigen Lage der Wirbel, d. h. also von den $\mathfrak{r}_{ik}$, wird somit ganz durch das erste Glied erfaßt. Dieses ist gleichlautend mit der Kirchhoffschen Bahnfunktion, die somit, wie bereits Kneschke erwähnt, bis auf eine additive Konstante gleich der kinetischen Energie des Strömungsfeldes ist.

Um das Hamiltonsche Prinzip anwenden zu können, müssen wir nun noch das Potential der gegenseitigen Kräfte der Wirbel aufstellen. Dabei ist zu beachten, daß die Kraft auf einen Wirbel nicht der Beschleunigung, sondern seiner Geschwindigkeit proportional ist. Man kann aber auch in derartigen Fällen das erweiterte Hamiltonsche Prinzip anwenden[2]), wenn man das Kräftepotential U so aufstellt, daß

$$X_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i}\right)$$

$$Y_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{y}_i}\right),$$

mit

$$\mathfrak{K}_i = i X_i + j Y_i = \sum\nolimits_k \mathfrak{K}_{ik} = \varrho\, \Gamma_i \lfloor \mathfrak{v}_i \text{ }^{3)}.$$

Man muß daher setzen:

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{\varrho}{2} \sum\nolimits_i \Gamma_i(-x_i \dot{y}_i + \dot{x}_i y_i) \\ &= \frac{\varrho}{2} \sum\nolimits_i \Gamma_i \lfloor \mathfrak{v}_i \circ \mathfrak{r}_i \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (3).$$

Dann lautet das Hamiltonsche Prinzip, angewandt auf die Wirbelbewegung:

$$\left.\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} (U - E)\, dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \frac{\varrho}{2} \sum\nolimits_i \Gamma_i \lfloor \mathfrak{v}_i \circ \mathfrak{r}_i \\ - \frac{\varrho}{2\pi} \sum\nolimits_{ik} \Gamma_i \Gamma_k \lg r_{ik} \Big\}\, dt = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (4).$$

Das ist aber das von Kneschke angegebene Minimalprinzip, das man jetzt so formulieren kann: Für die wirkliche Bewegung der freien Wirbel ist der zeitliche Mittelwert der Differenz aus dem (oben definierten) Potential der gegenseitigen Anziehungskräfte der Wirbel und der kinetischen Energie des Strömungsfeldes stationär.

2. Der Abwind hinter einer tragenden Linie.

Um das obige Minimalprinzip auf die Tragflügeltheorie anwenden zu können, müssen wir es zunächst auf die Bewegung einer Wirbelschicht übertragen. Die Koordinaten der Schicht seien η und ζ, die Zirkulation $\gamma(\eta, \zeta)$ und s die Bogenlänge (s. Bild 2). Für ein infinitesimales Stück der

Bild 2.

Wirbelschicht $d\Gamma = \gamma(y, z)\, ds$ an der Stelle y, z benutzen wir nun die Gleichungen (2), (3) und (4), wobei Γ_i durch $d\Gamma$ usw. zu ersetzen ist. Dann ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \delta \Big\{ \varrho\, d\Gamma \int_{t_0}^{t_1} \Big[\frac{1}{2}(-z\dot{y} + y\dot{z}) - \frac{1}{2\pi} \int_{(s)} \gamma(\eta, \zeta) \\ \lg \sqrt{(\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}\, ds \Big] dt \Big\} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (5).$$

Dabei ist $d\Gamma$ konstant zu halten. Die zu dieser Variationsaufgabe

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} F(y, z;\, \dot{y}, \dot{z})\, dt = 0$$

zugehörigen Euler-Gleichungen

$$F_y - \frac{d}{dt} F_{\dot{y}} = 0 \qquad \text{und} \qquad F_z - \frac{d}{dt} F_{\dot{z}} = 0$$

lauten:

$$\left.\begin{aligned} \dot{z} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(s)} \frac{\gamma(\eta, \zeta)(\eta - y)}{\sqrt{(\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}\, ds \\ \dot{y} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(s)} \frac{\gamma(\eta, \zeta)(\zeta - z)}{\sqrt{(\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}\, ds \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6).$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich jetzt als Sonderfall der Abwind hinter einer tragenden Linie berechnen. Weit hinter einer tragenden Linie können wir nämlich die Strömung in einer Querebene senkrecht zur Flugrichtung als zweidimensional betrachten. Das abgehende Wirbelband soll noch eben sein: $\zeta = 0$, $z = 0$, d. h. wir setzen voraus, daß die Eigenbewegung der freien Wirbelfäden klein ist gegenüber der Fluggeschwindigkeit. Wie üblich sei

[2]) Handbuch der Physik V, Berlin 1927.

[3]) $\mathfrak{K}_i$ ist die Resultierende der Kräfte, die die Wirbel Γ_k auf den Wirbel Γ_i ausüben.

$$\gamma(\eta, \zeta)\, \mathrm{d}s = \frac{\partial \Gamma(\eta)}{\partial \eta}\, \mathrm{d}\eta$$

die Zirkulation der Wirbelschicht an der Stelle $y = \eta$, und b die Spannweite. Wir betrachten nun an irgendeiner Stelle y des Wirbelbandes den zugehörigen Wirbelfaden $\mathrm{d}\Gamma = \frac{\partial \Gamma(y)}{\partial y}\mathrm{d}y$ und fragen nach seinen Bewegungsgleichungen. Für diesen Fall ergeben die Gleichungen (6):

$$\left.\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-b/2}^{+b/2} \frac{\partial \Gamma(\eta)}{\partial \eta}\, \frac{\mathrm{d}\eta}{y-\eta} \\ \dot{y} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7).$$

Die zweite Gleichung sagt aus, daß die Wirbelfäden keine Querbewegung in y-Richtung ausführen, die erste gibt die Abwärtsgeschwindigkeit. Berücksichtigt man, daß der Abwind $w(y)$ an der tragenden Linie selbst, wo die freien Wirbel nur in einer Richtung ins Unendliche verlaufen, nur halb so groß ist wie der weit hinten, so findet man die bekannte Formel für den Abwind am Ort der tragenden Linie:

$$w(y) = \frac{1}{2}\,\dot{z} = \frac{1}{4\pi}\int_{-b/2}^{+b/2} \frac{\partial \Gamma(\eta)}{\partial \eta}\, \frac{\mathrm{d}\eta}{y-\eta}.$$

Damit ist das Variationsprinzip (5) bestätigt.

Ein anderes Minimalprinzip für die tragende Linie hat F. Ziller[4]) von der Abwindgleichung ausgehend, aufgestellt. Dabei wird aber nicht, wie hier, die Bahn eines abgehenden Wirbelfadens selbst variiert, sondern der effektive Anstellwinkel an einer Stelle des Wirbelbandes. Ziller berechnet damit Auftriebsverteilungen, indem er die Variationsaufgabe direkt mit einem Ritz-Ansatz löst. Physikalisch erscheint es nun wahrscheinlich, daß sein Minimalprinzip auch mit dem Hamiltonschen Prinzip in Beziehung steht; es ist jedoch zu undurchsichtig, um diesen Zusammenhang erkennen zu lassen. Andererseits liegt mathematisch kein zwingender Grund für einen derartigen Zusammenhang vor, da es durchaus möglich ist, daß zwei verschiedene Variationsaufgaben zu ein und derselben Euler-Gleichung führen, ohne daß zwischen den variierten Ausdrücken selbst eine innere Verwandtschaft besteht.

Göttingen. K. Wieghardt. 312

[4]) F. Ziller: Beitrag zur Theorie des Tragflügels von endlicher Spannweite. Ing.-Arch. Bd. 11 (1940) S. 239.

BUCHBESPRECHUNGEN

Prof. Dr. HUGO **DINGLER**, Max Planck und die Begründung der sogenannten modernen theoretischen Physik. 32 S. Berlin 1939, Ahnenerbe-Stiftung-Verlag. Preis 0,80 M.

Das Heft enthält zwei bereits in einer Fachzeitschrift veröffentlichte Aufsätze von Dingler: 1. „Zur Entstehung der sogenannten modernen theoretischen Physik" und 2. „Determinismus oder Indeterminismus?" In beiden wendet sich der Verf. gegen die erkenntnistheoretischen und methodologischen Anschauungen Plancks. So bekämpft er in 1. vornehmlich das von Planck der Physik gesetzte Ziel: die Loslösung des physikalischen Weltbildes von der Individualität des bildenden Geistes, um allmählich zur Erkenntnis der realen, d. h. von den menschlichen Sinnen unabhängigen Außenwelt zu gelangen. Dingler stellt dieser „gespenstischen metaphysischen Überwelt" die „primäre Lebenswelt" gegenüber, die sich ihm ergibt aus „jenem frischen, noch von keinen Zweifeln angekränkelten Erleben des Alltags, das wir alle kennen und haben, und in dem auch die Sinneswahrnehmungen nicht nur subjektiv sind, sondern jeder unmittelbar weiß, daß sein Nebenmensch im wesentlichen genau die gleichen hat". Es geht also wieder einmal um das Wirklichkeitsproblem, das die Philosophen seit Jahrtausenden beschäftigt, ohne daß bisher eine zweifelsfreie Lösung geglückt wäre. — Auf ein Mißverständnis auf S. 7 sei hingewiesen. Dingler bezichtigt da Planck einer Anschauung, die dieser indessen als Folgerung des von ihm bekämpften Machschen Sensualismus entschieden ablehnt mit den Worten: „Ich glaube nicht, daß ein richtiger Physiker jemals auf solche seltsamen Gedankengänge verfallen würde." Dinglers scharfe Kritik: „Welch ein katastrophales Programm für eine Physik" ist also an die falsche Adresse gerichtet. Im 2. Aufsatz ergibt sich bezüglich der Frage der Determiniertheit eine gewisse Übereinstimmung zwischen Dingler und Planck, da beide die Indeterminiertheit des menschlichen Willens proklamieren, soweit er „gegenwärtiger Wille" (Planck) bzw. „aktiver Wille" (Dingler) ist. In der Tat beruht auch das „eindeutig-methodische System" Dinglers, das dieser ausführlich in seiner „Methode der Physik" dargestellt hat, auf der Tätigkeit dieses aktiven Willens; vgl. die Besprechung in dieser Zeitschrift Bd. 19 (1939), S. 59. Immerhin findet er schließlich „bei Planck zuletzt doch wieder eine bedauerliche Unsicherheit und Verwirrung im Methodischen, welche eindringlich auf die Notwendigkeit hinweist, hier zunächst einmal Ordnung zu schaffen". Solange freilich der von Dingler gewünschte, auf Grund seines e.-m. Systems durchzuführende lückenlose, allen Forschungsergebnissen Rechnung tragende Aufbau der Physik noch nicht vorliegt, wird das physikalische Weltbild wohl auch weiterhin durch jene von Dingler verworfenen, bzw. nur als zeitweiliger Notbehelf aufgefaßten Theorien bestimmt werden, ohne daß übrigens deswegen alle Physiker auch mit der erkenntnistheoretischen Stellung Plancks einverstanden zu sein brauchten.

Berlin. E. Mosch. 274

J. P. **AREND**, Die wirkliche Mechanik des Geschehens im Lebenden und Toten. 456 S. Zürich und Leipzig 1941, Rascher Verlag. Preis geb. 10 M.

Der Verf. glaubt, das „kausalitätserschließende Bezugssystem" gefunden und „das höchste Ziel der Wissenschaft, die Erkenntnis des Wirklichen, das Wahre" erreicht zu haben. Das Buch setzt sich mit der gegenwärtigen Wissenschaft in allen ihren Zweigen auseinander. Ein kurzer Bericht, wie er hier nur möglich wäre, ist wegen der neuartigen Vorstellungen und Gedankengänge des Verf. leider nicht möglich; der Ref. muß sich daher auch jeden Urteils über die Beweiskraft der Ausführungen sowie über Bedeutung und Tragfähigkeit der Ergebnisse enthalten.

Berlin. E. Mosch. 314

Dr. C. **KLOUČEK,** Das Prinzip der fortgeleiteten Verformung als Weg zur Ausschaltung der Unbekannten aus dem Formänderungsverfahren. 391 S. Berlin 1941, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. Preis brosch. 18 M.

Der Verfasser beschäftigt sich in diesem Buche mit dem Spannungsnachweis in Rahmen, deren Knoten durch geeignete Randbedingungen am Tragwerk unverschieblich sind oder als unverschieblich angenommen werden. Der Verschiebungszustand ist dann allein durch die Knotendrehwinkel bestimmt. Diese werden aus den Bedingungen des Gleichgewichts der Stabendmomente am Knoten berechnet, die sich als Funktion der Stabbelastung und der Knotendrehwinkel anschreiben lassen. Die linearen Gleichungen können in diesem Falle leicht durch Iteration gelöst werden. Dasselbe gilt vom Gaußschen Algorithmus, wenn der Ansatz die dreigliedrige Form erhält. In diesem Falle bestehen zwischen den unbekannten Knotendrehwinkeln einfache Kennbeziehungen, mit denen die Lösung schnell für jedes einzelne Belastungsglied angegeben wird, um daraus das endgültige Ergebnis abzuleiten. Diese Rechenvorschrift läßt sich oft in allgemeinen Fällen als Näherung verwenden. Sie ist bei der Bedeutung der Rahmenberechnung für die Baustatik in zahlreichen Abwandlungen vorgeschlagen und in der Praxis des Bauingenieurs je nach Geschmack und Erziehung verwendet worden. Hierzu zählt auch die Rechenvorschrift des Verfassers. Dabei werden zunächst die Knotendrehwinkel aus dem Gleichgewicht der Stabendmomente eines Knotens bei voller Einspannung der angeschlossenen Stäbe bestimmt und die Fortpflanzung dieser Verformung auf die benachbarten Knoten verfolgt. Die endgültigen Knotendrehwinkel ergeben sich durch Superposition und damit die Stabendmomente, welche die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Ich vermag die Erwartung des Verfassers, die dieser an die Brauchbarkeit der Lösung stellt, nicht zu teilen. Die übliche Rechenvorschrift ist übersichtlich und die Auflösung der linearen Gleichungen gerade hier kein Problem. Die theoretischen Betrachtungen des Verfassers sind ausführlich erläutert und durch Tabellen und zahlreiche Beispiele zur statischen Untersuchung von Baukonstruktionen ergänzt.

Dresden. K. Beyer. 330

Prof. Dr. AUGUST **THUM** und Dr.-Ing. OTTO **PETRI,** Steifigkeit und Verformung von Kastenquerschnitten mit Verrippungen, Wanddurchbrechungen u. bei Behinderung der Querschnittsverwölbung (VDI-Forschungsheft 409, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens", Ausgabe B, Bd. 12, Juli/August 1941). 28 S. m. 72 Bildern und 8 Zahlentaf. Berlin 1941, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis 5 M.

Ausgehend von dem Gedanken, daß der ungeheuere Verbrauch an Werkstoffen in der heutigen Zeit zu äußerster Sparsamkeit zwingt, weisen die Verfasser vor allem auf die weit bedeutsamere Forderung hin, daß nur der Leichtbau auf vielen Gebieten des Maschinenwesens den höheren Geschwindigkeiten und Leistungen, die als Folge einer natürlichen Entwicklung anzusehen sind, gerecht werden kann. Für den Leichtbau genügt jedoch die Güte des Werkstoffes allein noch nicht. Das Wesen dieser Bauweise muß vielmehr darin erblickt werden, Konstruktionen mit größtmöglicher Steifigkeit zu schaffen, was nur durch günstige Formgebung und Kenntnis der Beanspruchungsart erreicht werden kann, um unnötige Werkstoffanhäufungen zu vermeiden.

Nach einer mathematischen Entwicklung des Begriffes Steifigkeit bei Zug-, Druck-, Biege- und Verdrehungsbeanspruchung werden bei gleichem Materialverbrauch die Starrheiten von 5 der gebräuchlichsten Hohlquerschnitte und einem Querschnitt offener Bauart miteinander verglichen. Für die sich stets schwierig gestaltende rechnerische Ermittlung der Schubspannungen bei Verdrehung von Hohlquerschnitten wird ein Näherungsverfahren angegeben. Die Ergebnisse der sich anschließenden Biege- und Verdrehungsversuche, für die ein Probekörper mit kastenförmigem Hohlquerschnitt als Grundform, einmal ohne und dann mit 6mal verschiedenartiger Innenverrippung, gewählt worden ist, erweisen recht befriedigend die Brauchbarkeit des rechnerischen Verfahrens. Um keine Lücke zu lassen, wurden die Versuche auch auf die Ermittlung der Spannungen bei den unvermeidlichen Wanddurchbrechungen des Hohlkörpers ausgedehnt und darüber hinaus selbst noch der Einfluß der Behinderung der Querschnittsverwölbungen bei Verdrehung untersucht.

Bei Besprechung dieser vorzüglichen Forschungsarbeit, die zu klaren Erkenntnissen führte, darf nicht übersehen werden, daß das Ziel nur durch eine wohlüberlegte Versuchsanordnung und durch mühsame, sorgfältige Feinmessungen erreicht worden ist.

Dresden. Findeisen. 331

Prof. Dr. Dr.-Ing. AUG. **FÖPPL (†)** und Dr. LUDWIG **FÖPPL,** o. Prof. a. d. Techn. Hochschule München, Drang und Zwang, eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure. Erster Band, 3. Aufl. XII + 346 S. m. 70 Abb. München u. Berlin 1941, Verlag R. Oldenbourg. Preis geb. 15,70 M.

Die vorliegende dritte Auflage des bekannten Buches weist gegenüber der 1924 erschienenen zweiten nur geringe Änderungen auf. Durchgehend ist kurz auf neuere, den betreffenden Gegenstand behandelnde Arbeiten hingewiesen. An größeren Änderungen ist zu erwähnen, daß dem Abschnitt über Plattenbiegung ein ausführlicher Bericht über die Arbeit von Lewe: „Die Lösung des Pilzdeckenproblemes durch Fouriersche Reihen" angefügt ist und daß in dem letzten, die Scheiben behandelnden Abschnitt die Paragraphen fortgelassen sind, die sich mit Näherungslösungen beschäftigten. Als Grund für diese Kürzung gibt Verf. an, daß nach seiner Ansicht Näherungslösungen von Scheibenproblemen nicht mehr die gleiche praktische Bedeutung zukomme wie früher, nachdem man heute derartige Probleme mit den Methoden der Spannungsoptik behandeln könne.

Wahrscheinlich infolge der wenigen Änderungen ist es möglich geworden, den Preis dieser Neuauflage trotz guter Ausstattung im Vergleich zu den heute sonst für derartige Werke gleichen Umfanges üblichen Preisen außerordentlich niedrig zu halten. Das ist sehr zu begrüßen und wird zur Verbreitung des Buches beitragen. Für die Neuauflage wäre aber doch eine Überarbeitung des Ganzen sehr wünschenswert gewesen. Dabei hätten die späteren Zusätze wirklich eingearbeitet werden müssen und vor allem wäre manches, z. B. bei der Behandlung und Anwendung der beiden Minimalsätze, schärfer zu fassen gewesen. Auch sähe man gern weitere neue Arbeiten berücksichtigt, wie etwa die in dieser Zeitschrift erschienenen von C. Weber über die Eingrenzung elastischer Größen mittels der beiden Minimalprinzipe.

Doch auch in der vorliegenden Form wird das Buch theoretisch interessierten Ingenieuren noch gute Dienste leisten können.

Dresden. Willers. 317

Dr. HEINRICH **BLASIUS**, Studienrat an der Ingenieur-Schule zu Hamburg, Wärmelehre, Physikalische Grundlagen vom technischen Standpunkt. 3. neubearb. Aufl. VIII + 299 S. m. 126 Fig., 67 Aufg. u. 15 Tabellen. Hamburg 1941, Verlag von Boysen & Maasch. Preis geb. 8 M.

Fast alle neueren Bücher über Technische Wärmelehre knüpfen eng an die von Zeuner begründete und von Mollier fortgeführte Darstellung dieses Gebietes an. Es ist ein unbestreitbares Verdienst des Verfassers, daß er sich bemüht, die Grundlagen der Wärmelehre dem Anfänger auch auf anderen Wegen zugänglich zu machen. Die Form wurde in erster Linie durch die Bedürfnisse von Ingenieurschulen gegeben. Ausgehend von eingehend durchgerechneten Zahlenbeispielen werden die einzelnen Gebiete dann unter sparsamster Verwendung mathematischer Hilfsmittel allgemein behandelt. Trotz dieser elementaren Darstellungsweise, die den mathematisch wenig vorgebildeten Leser mit großem Geschick an das Wesen der Vorgänge heranführt, wird überall wissenschaftliche Genauigkeit angestrebt. Das Buch geht inhaltlich erheblich über die klassische Thermodynamik der Gase und Dämpfe hinaus und bringt in gleicher Darstellungsart Abschnitte über feuchte Luft, Mischdampf, Lösungen usw. Freilich vermißt man gerade hier das Fehlen von Schaubildern, die dem Anfänger auch dort einen klaren Überblick geben, wo er dem verwickelten Rechnungsvorgang nicht folgen kann.

Bedauerlich ist, daß der Verfasser auch in der neuen Auflage von genormten oder festliegenden Bezeichnungen abweicht, so daß der Gebrauch des Buches neben den üblichen Taschenbüchern mindestens sehr erschwert wird. Besonders unglücklich ist die Bezeichnung „Wärmestrom" statt Enthalpie oder Wärmeinhalt. Dazu werden Verwechslungen noch dadurch erleichtert, daß die „Innere Energie" mit „Energieinhalt" bezeichnet wird. Eine allgemeine Einführung der üblichen Bezeichnungen könnte den Wert des besonders für Ingenieurschulen sehr geeigneten Buches sicher noch erhöhen.

Dresden. W. Pauer, VDI. 337

OTTO **SCHAUB**, Beiträge zur Strömungslehre. 47 S. Biel (Schweiz) 1940, Selbstverlag O. Schaub-Scheurmann. Preis brosch. 3 frcs.

Der Verfasser versucht, für die Helmholtz-Kirchhoffschen Strömungen mit freier Strahlgrenze eine Lanze zu brechen, weil nach seiner Meinung die darauf aufbauende Widerstandstheorie durch die 40 Jahre jüngere Prandtlsche Grenzschichtstheorie zu Unrecht verdrängt würde. Die Strömungen mit und ohne freie Strahlgrenzen unterscheidet er als „offene" und „geschlossene" Strömungen, die als stationäre Strömungen gleichberechtigte Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen darstellen. Wieweit man sie als stationäre Strömungen beobachten kann, hängt natürlich davon ab, welchen Einfluß die vernachlässigte Reibung besitzt und ob Stabilität der Lösung gegenüber kleinen Strömungen vorhanden ist. Im Gegensatz zu allen eingehenden theoretischen und experimentellen Untersuchungen glaubt der Verfasser, daß die „offene" Strömung, also diejenige mit freien Strahlgrenzen, sich unmittelbar durch den Beschleunigungsvorgang ausbildet. Er beweist dies für den zweidimensionalen Fall eines Spaltes in ebener Platte, bei dem er eine gleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung im Spalt oder Strahl statt der ungleichmäßigen Geschwindigkeitsverteilung im Spalt bei der geschlossenen Potentialströmung erwartet, mit folgenden Worten:

„Die gegebenen Anfangsbedingungen sprechen nun keineswegs zugunsten der Entstehung einer geschlossenen Strömung. Denn der im Augenblick des ersten Bewegungsbeginnes über die ganze Durchflußöffnung gleichförmig verteilte Drucksprung ruft[1]) einer ebensolchen Beschleunigung der Massen links der Spaltöffnung, womit eine unveränderliche Geschwindigkeit eingeleitet wird. Man braucht sich nur den Vorgang so vorzustellen, daß eine die Öffnung abschließende Membrane plötzlich entfernt wird, um zu erkennen, daß jede andere Druckverteilung rechts der Membrane gegen das hydrostatische Grundgesetz der Druckfortpflanzung verstoßen würde.

Und weil im Augenblick des Bewegungsbeginnes die Zentrifugalkräfte, die bei geschlossener Strömung die Ursache der unterschiedlichen Druckverteilung im Öffnungsquerschnitt sind, fehlen, bzw. verschwindend klein sind im Verhältnis zum antreibenden Druckgefälle, so ist überhaupt gar keine Möglichkeit zur Ingangbringung einer ungleichförmigen Strömung gegeben."

Um die Tatsache, daß jeder Stromfaden wegen der Kontinuität an allen Orten gleichzeitig beschleunigt werden muß, wobei die einzelnen Stromfäden bei ihrer verschiedenen Geometrie eine unterschiedliche Aufteilung des Druckgefälles verlangen, und daß die ungleichen Druckgradienten auch eine ungleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung erzeugen, kümmert sich der Verfasser offenbar nicht. Denselben Mangel an Beweiskraft weisen auch seine übrigen Ausführungen, bei denen er z. B. das gelegentliche Auftreten geschlossener Strömungen aus anfänglich offenen Strömungen etwa im Venturirohr umständlich erklären muß, an den entscheidenden Stellen auf. Man stellt daher mit einer gewissen Befriedigung fest, daß derartige Abhandlungen offenbar nur noch im Selbstverlag erscheinen können.

Braunschweig. A. Busemann. 329.

[1]) Der kleine Fehler im Satzbau steht im Original, ist aber natürlich belanglos.

Dr. CLEMENS **SCHAEFER**, o. ö. Prof. d. Physik an der Univ. Breslau, Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. 4. verb. Aufl. 142 S. m. 33 Textfig. Berlin 1941, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 6 M.

Verf. behandelt von dem Coulombschen Gesetz ausgehend zunächst die Gesetze der Elektrostatik und Magnetostatik. In den folgenden Kapiteln werden die Gesetzmäßigkeiten über das Magnetfeld des elektrischen Stromes und die Faradaysche Induktion erörtert, wobei Verf. auch Anwendungen stationärer und quasistationärer Felder berücksichtigt. Das Schlußkapitel befaßt sich mit der Ausbreitung von elektrischen Wellen in Isolatoren und Leitern. Dabei wird auch der Gültigkeitsbereich der Maxwellschen Theorie im Zusammenhang mit der neueren Quantentheorie in den Kreis der Betrachtungen gezogen.

Es wäre zu begrüßen, wenn Verf. in der nächsten Auflage auch das Pohl-Miesche-Maßsystem der Elektrodynamik heranziehen würde.

Die Darstellung ist gegenüber früheren Auflagen verbessert und klarer gestaltet. Ich empfehle das ausgezeichnete Buch allen Physikstudierenden deshalb besonders, weil es in didaktischer Hinsicht kaum zu übertreffen ist.

Dresden. H. Falkenhagen. 338

Prof. G. **MAHLER**, Physikalische Formelsammlung. Neubearbeitet von Prof. K. Mahler, Studienrat a. d. Schubartoberschule Aalen in Württemberg. 7. verb. Aufl. (Sammlung

Göschen Bd. 136). 152 S. m. 69 Fig. Berlin 1941, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

Die bekannte und vielbenutzte Formelsammlung, die alle wichtigeren Sätze und Formeln der Physik enthält, soweit ihr Verständnis nicht die Hilfsmittel der höheren Mathematik voraussetzt, ist in einer neuen Auflage erschienen. Die Änderungen gegen die vorhergehende beziehen sich im wesentlichen auf die Anpassung der Bezeichnungen an die Vorschriften des Normenausschusses. Sachliche Erweiterungen haben insbesondere die über die Fluglehre und die Spektroskopie handelnden Abschnitte erfahren, womit den Fortschritten der Wissenschaft Rechnung getragen ist.

Berlin. E. Mosch. 316

Dr. **KARL KOMMERELL**, em. o. Prof. d. Math. a. d. Universität Tübingen, Vorlesungen über analytische Geometrie der Ebene. VIII + 368 S. m. 92 Fig. Leipzig 1941, K. F. Koehler Verlag. Preis 20 M.

Seine „Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes“[1]) vervollständigt der Verfasser durch den vorliegenden Band zu einem geschlossenen Lehrbuch; er hat in ihm zugleich mit der Darbietung des notwendigen Stoffes als Aufgabe die Heranführung des Anfängers an die Gedanken, die in der Geometrie und in ihrer analytischen Behandlung wirksam werden. Von den elementaren Methoden der Parallel- und Polarkoordinaten ausgehend werden die Grundbegriffe der metrischen Geometrie entwickelt und sehr bald — unter Benutzung der komplexen Zahlen — die metrischen Transformationsgruppen eingeführt. Diese geben Anlaß zur Aufstellung der projektiven Gruppe und mit ihr zusammen zur frühzeitigen Berücksichtigung des Erlanger Programmes von F. Klein. Nunmehr kann der Verfasser den Aufbau des geometrischen Lehrgebäudes gleichzeitig von der geometrischen und von der analytischen Seite her gestalten. Zunächst leitet das Polarsystem des Kreises zur Einführung der uneigentlichen Elemente und die Zentralprojektion zur Einführung der homogenen Koordinaten. Die Entwickelung der Grundbegriffe der projektiven Geometrie im Verein mit der Einführung der Linienkoordinaten ermöglicht die Feststellung des Dualitätsprinzips, die projektive Erzeugung der Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse, sowie die Ableitung der Sätze von Pascal und Brianchon. Die Einordnung der Kreisgeometrie durch die unendlichfernen imaginären Kreispunkte und die Formel von Laguerre führen zur Cayley-Kleinschen Maßbestimmung, in der der erste Abschnitt seinen Abschluß findet.

Der zweite Abschnitt ist den Eigenschaften der Kegelschnitte gewidmet, die in homogenen Parallelkoordinaten zum Ausdruck gelangen. Eine sorgfältige Untersuchung der gemeinsamen Punkte zweier Kurven zweiter Ordnung führt zum Kegelschnittbüschel und zur Kegelschnittschar, der die projektive Fassung der Brennpunktseigenschaften angeschlossen wird. Der dritte Abschnitt führt die Dreieckskoordinaten ein und wendet sie an auf die projektive Theorie der Kegelschnitte, sowie der Kollineationen und Korrelationen, dabei die schon vorher angebahnte Benutzung der Invariantentheorie wesentlich vertiefend. Ein Anhang entwickelt die notwendigen Sätze über zwei- und dreigliedrige Determinanten.

Dem Buch sind dieselben Vorzüge nachzurühmen wie den Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes; wie diese entspricht es in vollstem Maße der Absicht des Verfassers, „der Geometrie zu dienen“.

Dresden. W. Ludwig. 336

[1]) Vgl. die Besprechung in Z. angew. Math. Mech. Bd 20 (1940) S. 294.

Dr.-Ing. W. **MEYER ZUR CAPELLEN**, Mathematische Instrumente. (Mathematik für Physiker und Ingenieure, herausgeg. von Prof. Dr. A. Kratzer, Bd. 1.) X + 247 S. m. 210 Fig. Leipzig 1941, Akademische Verlagsgesellschaft Becker & Erler Kom.-Ges. Preis geb. 30 M.

Die Anwendung mathematischer Methoden dringt in immer weitere Gebiete vor. Dabei handelt es sich nicht nur um mathematische Formulierungen und daran anschließende theoretische Untersuchungen, sondern oft um zahlenmäßige Auswertung der sich ergebenden Formeln. Da für diese oft mathematische Instrumente benutzt werden können, besteht heute allgemein ein großes Interesse für diese Apparate. Die Veröffentlichungen darüber sind aber sehr zerstreut und teilweise schwer zugänglich. Es ist daher zu begrüßen, daß Verf. diese zusammenfassende Übersicht gegeben hat.

Er faßt sein Thema im weitesten Sinne und rechnet zu den mathematischen Instrumenten nicht nur, wie man es heute meist tut, Instrumente zum Integrieren, Differenzieren, Rektifizieren, Analysieren, Synthetisieren, Umzeichnen, Auftragen und Kurvenzeichnen, sondern behandelt außerdem Rechenschieber (in der Hauptsache „System Darnstadt“) und sonstige logarithmische Rechengeräte. Rechenmaschinen und Vorrichtungen zur Lösung von Gleichungen. Dabei werden nicht nur mechanisch, sondern auch elektrisch oder elektrooptisch arbeitende Apparate besprochen.

Die Darstellung ist getriebetechnisch orientiert. Als Einführung gibt Verf. daher einige Abschnitte über die verschiedenen Rechengetriebe, die ja heute in vielen Maschinen — ich erwähne nur die Kommandogeräte der Flugabwehr — verwendet werden. Besonders hervorgehoben zu werden verdient der Abschnitt über Rechenmaschinen, der sich durch zahlreiche instruktive Lichtbilder auszeichnet, die den inneren Aufbau und die Wirkungsweise (Schaltwerk, Zehnerübertragung, Löschvorrichtung, Schlittentransport usw.) der verschiedenen Systeme erläutern. Diese Bilder stammen fast alle von Herrn F. Hecht (Zella-Mehlis) und auch Aufbau und Text dieses Abschnittes lehnen sich eng an ein Manuskript des Herrn Hecht an. Während bei den Rechenmaschinen die Entwicklung zu einem gewissen Abschluß gekommen zu sein scheint, kann bei den Geräten zum Lösen von Gleichungen nur von einem Anfang gesprochen werden. Die eigentlichen mathematischen Instrumente dagegen, insbesondere Planimeter, harmonische Analysatoren und Integratoren stehen mitten in einer lebhaften Entwicklung. Zahlreiche Neukonstruktionen sind in den letzten Jahren geschaffen, an vielen wird noch gearbeitet. Vor allem konzentriert sich heute das Interesse auf Apparate zur Integration von Differentialgleichungen, auf die Verf. vielleicht etwas ausführlicher hätte eingehen sollen.

Natürlich behandelt Verf. allgemein nur eine Auswahl dieser Instrumente, nämlich solche, die er für wichtig oder entwicklungsfähig hält. Um ein weiterführendes Studium einzelner Fragen zu erleichtern, gibt er am Schluß ein rund 270 Nummern umfassendes Verzeichnis des neueren Schrifttums.

Das vorliegende Buch ist der erste Band einer neuen Reihe von Lehrbüchern, die unter dem gemeinsamen Titel „Mathematik für Physiker und Ingenieure“ erscheinen sollen. Mir scheint mit dieser Darstellung der mathematischen Instrumente ein guter Anfang gemacht zu sein. Man kann nur wünschen, daß die folgenden Bände, vor allem was Ausstattung und Druck anlangt, ebenso vortrefflich ausfallen, wie der vorliegende.

Dresden. Willers. 344

Dr. LOTHAR **SCHRUTKA,** o. Prof. d. Math. a. d. Techn. Hochschule Wien, Leitfaden der Interpolation. VII + 80 S. Wien 1941, Springer-Verlag. Preis steif geh. 4,80 M.

Dieser ganz elementar geschriebene Leitfaden behandelt in den ersten 4 Abschnitten (Steigungen, Steigungen mit gleichen Argumenten, Interpolation von Polynomen und parabolische Interpolation als Näherungsverfahren) die Interpolation für beliebige Argumente. In dem nächsten Abschnitt über parabolische Quadratur, in dem in der Hauptsache, die Sehnentrapez-, die Tangententrapez- und die Simpsonsche Regel mit Fehlerabschätzung abgeleitet werden, geht Verf. dann zu gleichabständigen Argumenten über. Ausführlich wird in einem weiteren Abschnitt die Interpolation bei solchen gleichabständigen Argumenten behandelt. Der letzte Abschnitt endlich beschäftigt sich mit der Moutonschen Aufgabe, also der Untertafelung. An Stoff wird etwas weniger gebracht als das, was man über diesen Gegenstand in den gebräuchlichen Lehrbüchern der praktischen Analysis findet, abgesehen vielleicht von dem letzten Abschnitt, der sich in diesen Büchern oft nicht findet. Besonders sei auf die vom Verf. gebrachten Restabschätzungen verwiesen. Die Darstellung ist sehr geschickt, so daß das Buch als erste Einführung durchaus empfohlen werden kann.

Dresden. Willers. 345

WALTHER **LIETZMANN,** Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen u. Formen. 5. durchges. u. erg. Aufl. VI + 296 S. m. 197 Fig. u. 16 Taf. Breslau 1941, Verlag Ferdinand Hirt. Preis geb. 8 M.

Das jetzt in Neuauflage erschienene unterhaltende Buch bringt, wie die früheren Auflagen, eine große Fülle anregenden und interessanten Stoffes, der aus Anekdoten, Gedichten, Stücken aus Romanen und Essays, Spielen usw. in bunter Folge zusammengetragen ist, so daß man sich gern müßige Stunden damit vertreibt. Von den früheren Auflagen unterscheidet sich die Neuauflage hauptsächlich wohl dadurch, daß ein Säuberungsprozeß an Material und Autorennachweisen durchgeführt wurde und die ausgemerzten Bestandteile einwandfreien Platz gemacht haben.

Berlin. E. Mosch. 315

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr. habil. ALBERT **KOCHENDÖRFER,** Dozent für Physik a. d. Techn. Hochschule Stuttgart, Plastische Eigenschaften von Kristallen und metallischen Werkstoffen. (Reine und angewandte Metallkunde in Einzeldarstellungen, herausgegeben von W. Köster, Nr. 7.) XII + 312 S. m. 91 Abb. Berlin 1941, Verlag Julius Springer. Preis geb. 28,50 M.

Dr. ROBERT **HAUSSNER,** oö. Prof. a. d. Univ. Jena, Sammlung von Aufgaben und Beispielen zur analytischen Geometrie der Ebene mit den vollständigen Lösungen. 2. unveränderte Aufl. (Sammlung Göschen, Bd. 256). 139 S. m. 22 Fig. im Text. Berlin 1941, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

Prof. Dr. A. **WITTING,** Differentialrechnung. 3. neubearb. Aufl. (Sammlung Göschen, Bd. 87). 201 S. m. 95 Fig. und 200 Beispielen. Berlin 1941, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

Dr. phil., Dr.-Ing. e. h., Dr. phys. e. h. R. W. **POHL,** o. ö. Prof. a. d. Univ. Göttingen, Einführung in die Mechanik, Akustik und Wärmelehre. X + 322 S. m. 527 Abb. Berlin 1941, Verlag J. Springer. Preis geb. 15,80 M.

NACHRICHTEN

Vortragsreihe.

Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs.

Im Außeninstitut der Technischen Hochschule Berlin veranstaltete dieses in Gemeinschaft mit dem Verband Deutscher Elektrotechniker, Bezirk Berlin und der Berliner Mathematischen Gesellschaft im Herbst 1941 eine Vortragsreihe: Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs. Die Reihe bestand aus 8 Vorträgen. Es sprachen:

1. und 2. Dr.-Ing. habil. K. Marguerre, Adlershof: Einführung in die Elastomechanik. Einführung der Grundbegriffe, der Balken unter Biegung und Torsion, Formänderungsarbeit, die energetische Methode in der Balkentheorie, Knickung des Stabes.

3. Prof. Dr.-Ing. G. Mesmer, Darmstadt: Experimentelle Verfahren zur Spannungsbestimmung. Messung der Spannungsänderung an der Oberfläche, Messung der absoluten Spannung an der Oberfläche, Messung an Modellen.

4. Prof. Dr.-Ing. K. Klotter, Berlin: Schwingungserscheinungen im Bau- und Maschinenwesen. Unterschied zwischen der statischen und dynamischen Betrachtungsweise, die Grundbegriffe der Schwingungslehre, erzwungene Schwingungen, Rolle der Dämpfung.

5. Prof. Dr.-Ing. R. Grammel, Stuttgart: Praktische Verfahren zur Lösung technischer Eigenwertprobleme. Eigenwertprobleme mit endlich vielen Freiheitsgraden, Eigenwertprobleme von kontinuierlichen Systemen, Methoden von Rayleigh, Ritz und Galerkin. Besonders dankenswert, daß der Vortragende auch sein eigenes Verfahren darstellte.

6. Dr.-Ing. K. Marguerre, Adlershof: Knick- und Beulvorgänge. Stabilitätsprobleme, Energiemethode, Plattenknickung. Geschlossene Lösungen bei der Rechteckplatte.

7. Dr.-Ing. habil. W. Flügge, Adlershof: Festigkeit von Schalen. Drehschalen, Kesselboden, unsymmetrische Belastung, Drehschalen mit negativer Krümmung, windschiefe Vierecke, Behältertheorie, allgemeine Biegetheorie der Drehschalen.

8. Prof. Dr. G. Hamel, Berlin: Ausblick auf neuere Ansätze. Nichtlineare Beziehungen zwischen Formänderung und Spannung. Prinzip der virtuellen Arbeiten, Minimalprinzipe, Zusammenhang mit den entsprechenden Sätzen der Allgemeinen Mechanik.

Berlin. Hamel. 346

Persönliches.

Anläßlich seines 65. Geburtstages wurde dem o. Professor für Strömungslehre an der Techn. Hochschule Berlin Dr.-Ing. H. Föttinger die Goethe-Medaille für Kunst und Wissenschaft verliehen.

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.